23/08/15

מבחן מסכם - 88-642 קורס תורת המשחקים

מועד **ב'**, סמסטר ב', תשע"ה

מרצה – ארז שיינר

משך המבחן – שעתיים וחצי.

חומר עזר – מחשבון פשוט בלבד

הוראות: יש לענות על דפי השאלון בלבד. מחברת הבחינה תשתמש לכם כטיוטה ולא תבדק.

ניתן לענות על כל השאלות, כל שאלה שווה 40 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל למטה (ל100)

שאלה 1

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

A, 1

	L	R
U	0,1,0,1	0,2,2,2
D	3,-1,-1,0	0,2,1,2

B, 1

	L	R
U	1,1,2,1	-1,3,3,2
D	0,0,0,1	1,2,2,2

A, 2

	L	R
U	0,2,2,0	3,3,2,1
D	2,0,1,0	3,0,0,1

B, 2

	L	R
U	-1,2,2,0	2,4,1,1
D	1,1,1,0	1,3,0,4

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. ____D______ .2 ______1______ .3 ______B_____ .4 ______L_____

רשמו את ערך המקסמין של שחקן 3 ____0____ ואת אסטרטגיית המקסמין שלו ____U_____

ב. נביט במשחק הבא: על השולחן 100 מטבעות. כל אחד משני שחקנים בתורו לוקח מטבע, שני מטבעות או שלושה מטבעות. המנצח הוא השחקן שלוקח את המטבע האחרון.
הוכיחו/הפריכו: בהנחה שתוכלו לבחור אם להתחיל או לתת לשחקן השני להתחיל, תוכלו לנצח בוודאות.

מדובר במשחק סופי בצורה רחבה עם שני שחקנים, ידיעה שלימה והתוצאות הן נצחון שחקן אחד או נצחון שחקן 2.
לכן לפי משפט לשחקן אחד יש אסטרטגיה מנצחת, או לשחקן 2 יש אסטרטגיה מנצחת.

(לא ייתכן שלשני הצדדים יש אסטרטגיה מבטיחה תיקו, כיוון שהמשחק מסתיים בהפסד של אחד מהם.)

כלומר אם נבחר להיות השחקן בעל האסטרטגיה המנצחת ננצח בוודאות.

(הערה: היו סטודנטים שמצאו את האסטרטגיה המנצחת – השחקן השני משלים כל בחירה של השחקן הראשון ל4. כך אחרי 25 מהלכים של כל אחד מהשחקנים השחקן השני מנצח.)

.2

א. **מצאו** את המקסמין והמינמקס של המשחק. אם למשחק יש **שיווי משקל**, הקיפו אותו בעיגול

1	0	0	1
0	0	1	3
1	-1	0	-1
2	-2	-1	0

מקסמין ____0____ מינמקס ____0____

ב. מצאו את כל שיווי המשקל במשחק הבא באמצעות אסטרטגיות מעורבות ו/או טהורות :

	L	R
T	1,0	0,1
B	0,1	2,0

נניח ששחקן אחד ישחק T בהסתברות p ושחקן 2 ישחק L בהסתברות q.

לכן

$$u_1(p,q) = 1\cdot pq + 0\cdot p(1-q) + 0\cdot(1-p)q + 2\cdot(1-p)(1-q) = 2-2p-2q+3pq$$

$$u_2(p,q) = 0\cdot pq + 1\cdot p(1-q) + 1\cdot(1-p)q + 0\cdot(1-p)(1-q) = p+q-2pq$$

נחשב את התגובה המיטבית של שחקן 1 בהינתן בחירת q של שחקן 2 וההפך:

$$u_1(p,q) = (3q-2)\mathrm{p} + 2 - 2q$$

$$BR_1(q) = \begin{cases} 1 & q > \frac{2}{3} \\ [0,1] & q = \frac{2}{3} \\ 0 & q < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$u_2(p,q) = (1-2p)\mathrm{q} + p$$

$$BR_2(p) = \begin{cases} 0 & p > \frac{1}{2} \\ [0,1] & p = \frac{1}{2} \\ 1 & p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

לכן נקודת שיווי המשקל היחידה הינה $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

.3

א. פונקציות התשלום של שני שחקנים במשחק אסטרטגי רציף נתונות, כאשר $x, y \in [0,1]$

$$U_1(x,y) = -x^2 + 2xy + y^2 \qquad\qquad U_2(x,y) = |x-y|$$

מצאו את כל נקודות שיווי המשקל של המשחק או הוכיחו שלא קיימות כאלה.

נחשב תגובות מיטביות.

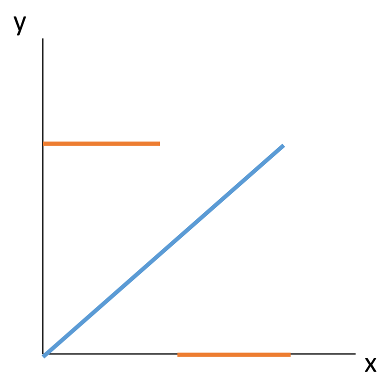
בהינתן y, קצה הפרבולה מתקבל בנקודה $-\frac{2y}{-2} = y$ והיא כמובן אסטרטגיה חוקית (נמצאת בקטע).

לכן:

$$BR_1(y) = y$$

התגובה המיטבית של שחקן 2 בהינתן x תלוייה בערך של x.

$$BR_2(x) = \begin{cases} 0 & x \ge \frac{1}{2} \\ 1 & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$



לכן סה"כ **אין** נקודת שיווי משקל במשחק.

ב. נביט במשחק מסעיף א' כמשחק בצורה רחבה בו שחקן 2 משחק ראשון, ולאחר מכן שחקן 1 מגיב. כיצד תשובתכם תשתנה?

שחקן 2 יודע שאם הוא יבחר בy שחקן 1 יבחר בתגובה המיטבית שלו לy.

לכן התשלום של שחקן 2 יהיה:

$$U_2\left(BR_1(y), y\right) = U_2\left(y, y\right) = \left|y - y\right| = 0$$

כלומר שחקן 2 אדיש למשחק, ויכול לבחור כל ערך.

כלומר כל נקודה מהצורה (a, a) הינה שיווי משקל משוכלל של המשחק.