פתרון תרגיל בית 8 - תורת גלואה
סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1. מצאו את כל התת-שדות של ההרחבה הציקלוטומית $\mathbb{Q}[\rho_5]/\mathbb{Q}$ (כאשר ρ_{15} הוא שורש יחידה 5-פרימיטיבי).

פתרון. כידוע $Gal\left(\mathbb{Q}[\rho_5]/\mathbb{Q}\right) \cong U_5$ ושריג התת-חבורות הוא

$$\begin{tikzcd}
U_5 \arrow[d, dash] \\
\langle 4 \rangle \arrow[d, dash] \\
1
\end{tikzcd}$$

ולכן שריג התת-שדות הוא

$$\begin{tikzcd}
E^1 = E \arrow[d, dash] \\
E^{\langle 4 \rangle} = \mathbb{Q}[\rho_5 + \rho_5^4] \arrow[d, dash] \\
E^{U_5} = \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

שאלה 2. נסמן ב Φ_n את הפולינום המינימלי של שורש ישחידה n-פרימיטיבי ρ_n מעל $\mathbb{Q}$.

חשבו את Φ_{15}, Φ_{18}.

פרקו את Φ_{18} מעל $\mathbb{Q}[\rho_3]$.

פתרון. הפולינום Φ_{15} גורם אי-פריק של $x^{15} - 1 = \Phi_{15}\Phi_5\Phi_3\Phi_1$ ולכן

$$\Phi_{15} = \frac{x^{15}-1}{\Phi_5\Phi_3\Phi_1} = \frac{x^{15}-1}{(x^5-1)\Phi_3} = \frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

כעת עבור Φ_{18}: כידוע $\deg\Phi_{18}=\varphi(18)=18(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=6$ ו $\Phi_{18}\mid x^{18}-1$.
קל לפרק $x^{18}-1=(x^9-1)(x^9+1)=\Phi_1\Phi_3\Phi_9\left(x^9+1\right)$ ולכן

$$\Phi_{18}\mid x^9+1=(x^3+1)(x^6-x^3+1)$$

ומכיוון ו Φ_{18} הוא אי-פריק מדרגה 6 בהכרח $\Phi_{18}=x^6-x^3+1$.

כעת נפרק את Φ_{18} מעל $\mathbb{Q}[\rho_3]$:
נסמן f_{18} את הפולינום המינימלי של ρ_{18} מעל $\mathbb{Q}[\rho_3]$, כמובן ש-$f_{18}\mid\Phi_{18}$.
נשים לב ש $\rho_{18}^6=\rho_6^2=\rho_3$ ולכן אם נציב ρ_{18} ב Φ_{18} נקבל את הזהות $\rho_6=\rho_3+1$ ולכן $\rho_6\in\mathbb{Q}[\rho_3]$.
ולכן נוכל לפרק $f_{18}\mid x^6-\rho_3=(x^3-\rho_6)(x^3+\rho_6)$ ולקבל $f_{18}\mid x^3-\rho_6$.
בנוסף $\mathbb{Q}[\rho_3]\subseteq\mathbb{Q}[\rho_{18}]$ ו $[\mathbb{Q}[\rho_3]\colon\mathbb{Q}]=2$ ולכן f_{18} הוא מדרגה $\frac{6}{2}=3$.
לכן $f_{18}=x^3-\rho_6$ והוא אי-פריק.
כעת נוכל לפרק:$\Phi_{18}=f_{18}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)$ ואחרי השוואת מקדמים נקבל

$$\Phi_{18}=f_{18}\left(x^3-\rho_6^5\right)=\left(x^3-(\rho_3+1)\right)\left(x^3-(\rho_3^2+1)\right)$$

נשאר לודא ש $x^3-\rho_6^5$ אי-פריק מעל $\mathbb{Q}[\rho_3]$: בדומה למה שעשינו עם f_{18}, נמצא ש $x^3-\rho_6^5$ הוא הפולינום המינימלי של ρ_{18}^5 מעל $\mathbb{Q}[\rho_3]$ ולכן אי-פריק.

שאלה 3. חשבו את המימדים הבאים:

1. $[\mathbb{Q}[\rho_7+\rho_7^2+\rho_7^4]\colon\mathbb{Q}]$
2. $[\mathbb{Q}[\rho_5]\colon\mathbb{Q}[\rho_5+\rho_5^3]]$

פתרון. 1. $\mathbb{Q}[\rho_7+\rho_7^2+\rho_7^4]$ מוכל ב$\mathbb{Q}[\rho_7]$ ולכן נבדוק איך $Gal\left(\mathbb{Q}[\rho_7]/\mathbb{Q}\right)\cong U_7$ פועל על $\alpha=\rho_7+\rho_7^2+\rho_7^4$:

$$\begin{aligned}
1&\colon\alpha\mapsto\alpha\\
2&\colon\alpha\mapsto\alpha\\
3&\colon\alpha\mapsto\rho_7^3+\rho_7^5+\rho_7^6\\
4&\colon\alpha\mapsto\alpha\\
5&\colon\alpha\mapsto\rho_7^3+\rho_7^5+\rho_7^6\\
6&\colon\alpha\mapsto\rho_7^3+\rho_7^5+\rho_7^6
\end{aligned}$$

יש שני איברים במסלול ולכן הדרגה היא 2.

2. נחשב את $[\mathbb{Q}[\rho_5+\rho_5^3]\colon\mathbb{Q}]$ ע"י חישוב הפעולה של $Gal\left(\mathbb{Q}[\rho_5]/\mathbb{Q}\right)\cong U_5$ על $\beta=\rho_5+\rho_5^3$:

$$\begin{aligned}1&\colon\beta\mapsto\beta\\2&\colon\beta\mapsto\rho_5^2+\rho_5\\3&\colon\beta\mapsto\rho_5^3+\rho_5^4\\4&\colon\beta\mapsto\rho_5^4+\rho_5^2\end{aligned}$$

יש 4 איברים שונים במסלול ולכן הדרגה היא 4, ולכן

$$\left[\mathbb{Q}[\rho_5]\colon\mathbb{Q}[\rho_5+\rho_5^3]\right]=\frac{4}{4}=1$$

ניתן גם לראות זאת משאלה 1, $\mathbb{Q}[\rho_5+\rho_5^3]$ לא תת-שדה ממש ולכן שווה לE.

שאלה 4. תהי K/F הרחבת גלואה ויהי $a\in K$. הוכיחו כי $K=F[a]$ אם ורק אם $\sigma(a)\neq a$ לכל $Id\neq\sigma\in Gal\left(K/F\right)$.

פתרון. נסמן $|Gal\left(K/F\right)|=n$
$\Leftarrow$: נניח $K=F[a]$. אם עבור $\sigma\in Gal\left(K/F\right)$ מתקיים $\sigma(a)=a$ אז $Gal\left(K/F[a]\right)=1$ $\sigma\in$ כלומר ש $\sigma=Id$.
$\Rightarrow$: אם $\sigma\in Gal\left(K/F[a]\right)$ אז בפרט $\sigma(a)=a$ ולפי ההנחה $\sigma=Id$. כלומר קיבלנו $Gal\left(K/F[a]\right)=1$. אך $K/F[a]$ גלואה ולכן $[K\colon F[a]]=|Gal\left(K/F[a]\right)=1|$ מה שאומר ש $K=F[a]$.