תרגול 4.

10:01 13 April, 2021

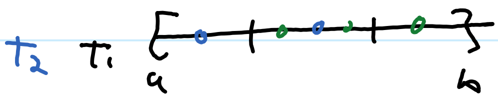
הגדרה: תהי f פונקציה ו T חלוקה של קטע $[a,b]$ אזי

סכום דרבו העליון $\overline{S}(f,T)=\sum_k \Delta I_k \cdot M_k$ כאשר $M_k=\sup_{x\in I_k} f(x)$

$\underline{S}(f,T)=\sum_k \Delta I_k \, m_k$ כאשר $m_k=\inf_{x\in I_k} f(x)$

משפט: תהי f פונקציה חסומה ויהי T_n סדרת חלוקות של הקטע $[a,b]$ כך שלכל $1\le k\le n$ החלוקה T_k היא העדנה של החלוקה T_{k-1}.

אזי:



$$\underline{S}(f,T_1)\le \underline{S}(f,T_2)\le\dots\le\underline{S}(f,T_k)\le\underline{\int} f\le\overline{\int} f\le \overline{S}(f,T_n)\le\overline{S}(f,T_{n-1})\le\dots\le\overline{S}(f,T_1)$$

תרגיל: תהי f פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$ סדרו את הערכים הבאים מהקטן ביותר לגדול ביותר.

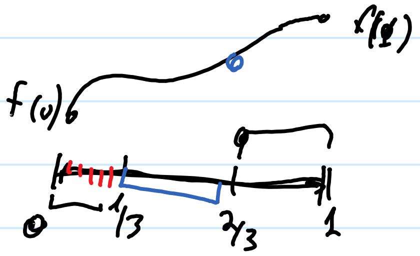
1. $f(0)$
2. $f(1)$
3. $\frac{1}{3}\left(f(0)+f(1/3)+f(2/3)\right)$
4. $1/3\left(f(1/3)+f(2/3)+f(1)\right)$
5. $1/300\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i-1}{300}\right)$
6. $1/300\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i}{300}\right)$

T_0: $0<1$

T_1: $0<1/3<2/3<1$

פתרון: נסמן חלוקה $T_0=\{0,1\}$, והעדנה שלה $T_1=\{0,1/3,2/3,1\}$

והעדנה שלה $T_2=\{0,1/300,2/300,\dots,299/300,1\}$



10:23 13 April, 2021

ולכן לפי המשפט מתקיים:

$$\underline{S}(f,T_0) \le \underline{S}(f,T_1) \le \underline{S}(f,T_2) \le \overline{S}(f,T_2) \le \overline{S}(f,T_1) \le \overline{S}(f,T_0)$$

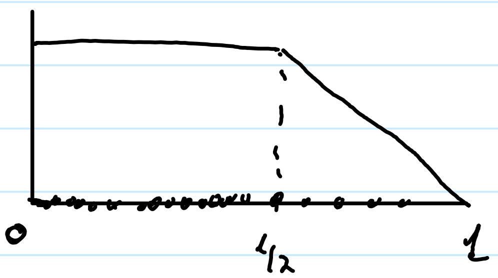
כעת, כיוון ש f מונוטונית עולה

$$\underline{S}(f,T_0) = 1 \cdot f(0) = f(0)$$

$$\underline{S}(f,T_1) = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1/3) + \frac{1}{3}f(2/3) = \frac{1}{3}\left(f(0) + f(1/3) + f(2/3)\right)$$

$$\underline{S}(f,T_2) = 1/300\, f(0) + 1/300\, f(1/300) + \frac{1}{300} f(2/300) \cdots + \frac{1}{300} f(299/300)$$

$$= \frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i-1}{300}\right)$$



<u>הגדרה:</u> תהי T חלוקה של הקטע $[a,b]$ נגדיר את פרמטר החלוקה (ונסמן $\lambda(T)$) את אורך הקטע הארוך ביותר בחלוקה T. כלומר

$$\lambda(T) = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

<u>משפט:</u> תהי T_n סדרת חלוקות כך שמתקיים $\lambda(T_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

אזי

$$\overline{S}(f,T_n) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{\int} f = \text{האינפימום של סכומי הדרבו העליונים} = \inf \overline{X}$$

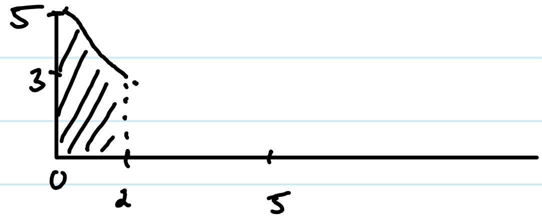
ובאופן דומה

$$\underline{S}(f,T_n) \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\int} f = \sup \underline{X}$$

ובאופן דומה $\underline{S}(f,T_n) \longrightarrow \underline{\int} f = \sup \underline{X}$

מסקנה: f אינטגרבילית $\iff$ f חסומה ו- $\overline{\int} f = \underline{\int} f$.

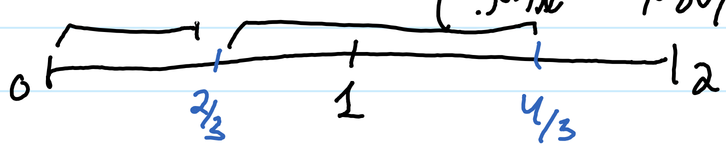
תרגול: חשבו את האינטגרל המסוים לפי דרבו של הפונקציה $f(x)=5-x$ בקטע $[0,2]$.



נבחר סדרת חלוקות של הקטע $[0,2]$

$$T_n = 0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \cdots < \frac{2n}{n} = 2$$

חלוקה הקטע ל n קטעים שווים.



כל קטע - אורך $\frac{2-0}{n} = \frac{b-a}{n}$.

$$T: 0+\frac{2}{n},\ \frac{2}{n}+\frac{2}{n}, \dots, 2$$

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\left[\frac{2}{n}(i-1), \frac{2}{n}i\right]$$

$f(x)=5-x$

$$\overline{S}(f,T_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n}(i-1)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5-\frac{2}{n}(i-1)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{10}{n} - \frac{4}{n^2}i + \frac{4}{n^2} = \frac{10}{n}\cdot n - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\cdot n$$

$$= 10 + \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{4}{n}} - \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 10 - \frac{4}{2} = 8 = \overline{\int_0^2} f$$

$$\frac{4}{n^2}\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = \frac{4}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\underline{S}(f,T_n) = \sum \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n}\cdot i\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 5 - \frac{2i}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 5 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2\cdot 5}{n}\cdot n - \frac{4}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 10 - \frac{4}{2} = 8 = \int_0^2 f$$

קיבלנו ש $\underline{\int} f = \overline{\int} f = 8$ ולכן f אינטגרבילית

בקטע $[0,2]$ והעליון תחתון 8.

תרגיל: הוכיחו כי פונקצית דריכלה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

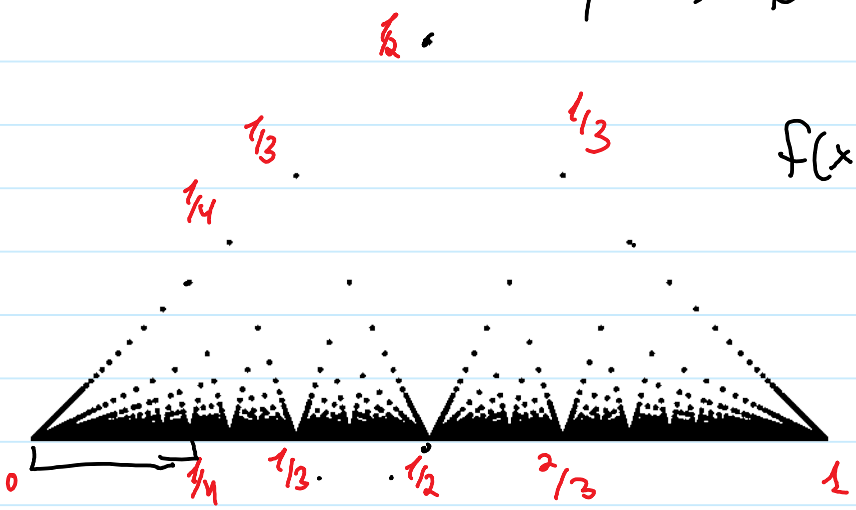
והראו כי: $\overline{S}(f,T) = 1$

$\underline{S}(f,T) = 0$.

תרגיל: נגדיר את פונקצית רימן באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

שבר מצומצם



$\frac{3}{4} \mapsto \frac{1}{4}$

$\frac{3}{8} \to \frac{1}{8}$

הוכיחו כי פונקציית רימן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

פתרון:

נחשב ראשית את סכום דרבו התחתון עבור חלוקה כלשהי T. בכל קטע $[x_i, x_{i+1}] \subseteq [0,1]$ יש נק' אי-רציונלית ששם $f(x_i)=0$. ולכן,

$$\underline{S}(f,T) = 0 \Rightarrow \underline{\int_0^1} f = 0.$$

נחשב את האינטגרל העליון.