בוחן לדוגמא־ מבוא לתורת החבורות

25.12.2017

1. ענו על הסעיפים הבאים: (15 נקודות כל סעיף)

(א) האם קיים בS_{13} איבר מסדר 27? האם קיים בS_{13} איבר מסדר 24? אם כן מצאו איברים כאלו. אם לא הוכיחו שלא.
פתרון: כל $\sigma \in S_{13}$ ניתנת להצגה כמכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \Pi_{i=1}^{t}\tau_i$ ואז

$$o(\sigma) = lcm_{1\leq i\leq t}\left\{o(\tau_i)\right\}$$

כעת, $27 = 3^3$ כיוון ש $o(\tau_i) \in \{1\ldots, 13\}$ לכל מחזור τ_i אזי $lcm_{1\leq i\leq t}\left\{o(\tau_i)\right\} \neq 27$. נימוק: נניח בשלילה כי $o(\sigma) = 27$. אם קיים $o(\tau_i) = r \notin \left\{1, 3, 3^2\right\}$ אזי $r|lcm_{1\leq i\leq t}\left\{o(\tau_i)\right\} = 27$ סתירה. אחרת כל $o(\tau_i) \in \left\{1, 3, 3^2\right\}$ ולכן $lcm_{1\leq i\leq t}\left\{o(\tau_i)\right\} \leq 9$, סתירה.
עבור $24 = 3 \cdot 8$: נגדיר $\tau_1 = (1, 2, 3)\,,\, \tau_2 = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$ ונגדיר תמורה $\sigma = \tau_1\tau_2$ המקיים

$$o(\sigma) = lcm\left\{o(\tau_1), o(\tau_{2)}\right\} = lcm\left\{3, 8\right\} = 24$$

כנדרש.

(ב) פתרו את המשוואה הבאה: $7x = 11 \mod 55$.
פתרון: כיוון $7, 55$ זרים נקבל כי קיים הופכי $7^{-1} \mod 55$. ואז $x = 7^{-1} \cdot 11 \mod 55$. מתקיים כי

$$7 \cdot 8 = 56 = 1 \mod 55$$

ולכן

$$7^{-1} = 8$$

ולכן

$$x = 7^{-1} \cdot 11 = 8 \cdot 11 = 33 \mod 55$$

2. (30 נקודות) תהי G חבורה (לא בהכרח אבלית) ויהיו $a, b \in G$. הוכיחו: $o(ab) = o(ba)$.
פתרון: בש.ב.

3. (10 נקודות כל סעיף) תהי G חבורה כלשהי, ו$H \leq G$. נגדיר : $N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$.

(א) הוכיחו ש$N_G(H) \leq G$.
פתרון:
כיוון ש $eH = He$ נקבל כי $e \in N_G(H)$. בנוסף יהיו $g_1 g_2 \in N_G(H)$ נראה ש $g_1 g_2 \in N_G(H)$. אכן

$$g_1 g_2 H = g_1 H g_2 = H g_1 g_2$$

נסיים בסגירות להופכי. יהא $g \in N_G(H)$ אזי $gH = Hg$ לכן $H = g^{-1}Hg$ ולכן $Hg^{-1} = g^{-1}H$ ולכן $g^{-1} \in N_G(H)$.

(ב) הוכיחו ש $H \subseteq N_G(H)$.
פתרון:
לכל $h \in H$ מתקיים כי $hH = H = Hh$ ולכן $h \in N_G(H)$.

(ג) הוכיחו ש: $H \trianglelefteq N_G(H)$.
פתרון:
לכל $g \in N_G(H)$ ולכן $h \in H$ נראה כי $g^{-1}hg \in H$. אכן מהשיוויון $gH = Hg$ נקבל כי $g^{-1}hg \in g^{-1}Hg = H$ כנדרש.

(ד) תנו דוגמא לG ו$H \leq G$ כך ש$N_G(H) = H$.
פתרון:
$G = S_3$ $H = \langle(1,2)\rangle$ אזי אם $\sigma \in G$ מקיים $\sigma H = H\sigma$ אזי $(\sigma[1], \sigma[2]) = $ $H \ni \sigma\,(1,2)\,\sigma^{-1}$ ולכן $\sigma \in \{id, (1,2)\}$ ולכן $N_G(H) = H$.

(ה) (בונוס) הוכיחו או הפריכו: אם $H, K \leq G$, אזי $N_G(H \cap K) = N_G(H) \cap N_G(K)$.
פתרון:
$G = S_3$ $H = \langle(1,2)\rangle\,, K = \langle(1,2,3)\rangle$ ואז

$$N_G(H \cap K) = N_G\{id\} = G$$

אבל

$$N_G(H) \cap N_G(K) \subseteq N_G(H) = H \neq G$$

בהצלחה!