בוחן־ מבוא לתורת החבורות

25.12.2017

1. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) (15 נקודות) חשבו את שתי הספרות האחרונות של 5823^{79}.
פתרון:
זה שקול לחשב $5823^{79} \mod 100$.
ובכן, $5823^{79} \mod 100 \equiv (5823 \mod 100)^{79} \mod 100 = 23^{79} \mod 100$.
ניזכר כי $\varphi(100) = 40$. לכן לפי משפט לגרנז', $23^{40} \equiv 1 \mod 100$. מכאן ש $23^{80} \equiv 23^{-1} \mod 100$. נמצא את ההופכי של 23 באמצעות אלגוריתם אוקלידס.

$$100 = 4 \cdot 23 + 8 \Longrightarrow 8 = 100 - 4 \cdot 23$$

$$23 = 2 \cdot 8 + 7 \Longrightarrow 7 = 23 - 2 \cdot 8 = 23 - 2(100 - 4 \cdot 23) = 9 \cdot 23 - 2 \cdot 100$$

$$8 = 1 \cdot 7 + 1 \Longrightarrow 1 = 8 - 7 = 100 - 4 \cdot 23 - (9 \cdot 23 - 2 \cdot 100) =$$

$$3 \cdot 100 - 13 \cdot 23$$

כלומר, ההופכי של 23 ב$\mathbb{Z}_{100}$ כיפלי הוא 13־ , שקול ל87. ולכן, שתי הספרות האחרונות של 5832^{79} הן 87 .

(ב) (15 נקודות) חשבו את המכפלה הבאה בS_n: $(1,2)(3,4,2)(5,3,4)^{-1}$
פתרון:
ראשית, נשים לב ש: $(5,3,4)^{-1} = (4,3,5)$.
כעת, נחשב:$(1,2)(3,4,2)(4,3,5) = (1,2,3,5)$

2. (30 נקודות) יהיו $H, K \leq G$ תת חבורות, כך ש $(|H|, |K|) = 1$. הוכיחו כי $H \cap K = \{e\}$.
פתרון:

ראשית, e שייך לכל תת חבורה, לכן $e \in H \wedge a \in K$, כלומר, $e \in H \cap K$.

כעת, נוכיח שe הוא האיבר היליד בחיתוך.

ובכן, יהי $a \in H \cap K$. בפרט, $a \in H, a \in K$. ממשפט לגרנז' ידוע ש $a \in H \Longrightarrow o(a)||H|$. כמו כן, $a \in K \Longrightarrow o(a)||K|$. כלומר, $o(a)||H|,|K|$. לכן $o(a)|(|H|,|K|)$. אבל $(|H|,|K|) = 1$. מכאן ש $o(a) = 1$. כלומר, $a = e$.

3. (10 נקודות לכל סעיף) תהי G חבורה. נסמן: $G^2 = \{g^2 : g \in G\}$.

(א) הוכיחו כי אם G אבלית, $G^2 \leq G$.

פתרון:

$e \in G^2$ כי $e = e^2$.

יהי $h \in G^2$. כלומר, יש $g \in G$ כך ש $h = g^2$. אז $h^{-1} = (g^2)^{-1} = (g^{-1})^2$. כלומר, $h^{-1} \in G^2$.

יהיו $h, k \in G^2$. כלומר, יש $g_1, g_2 \in G$ כך ש $h = g_1^2, k = g_2^2$. אזי $hk = (g_1)^2(g_2)^2 = g_1g_1g_2g_2 = g_1g_2g_1g_2 = (g_1g_2)^2$ ולכן $hk \in G^2$. (שימו לב שבמעבר השלישי השתמשנו בעובדה שG אבלית.)

(ב) (בונוס) תנו דוגמא לחבורה לא אבלית G כך ש$G^2 \leq G$.

פתרון:

נקח $G = D_4$. מבדיקה ישירה מגלים ש $G^2 = \{\sigma^2, id\}$ וזאת כידוע תת חבורה של D_4 .

(ג) הוכיחו כי אם G^2 תת חבורה של G, אז היא תת חבורה נורמלית.

פתרון:

נוכיח סגירות להצמדות. יהי $h \in G^2$ ו$k \in G$. אזי קיים $g \in G$ כך ש $h = g^2$. $khk^{-1} = kg^2k^{-1} = (kgk^{-1})^2 \in G^2$.

(ד) מהם הסדרים האפשריים של איברים בG/G^2 ?

פתרון:

יהי gG^2 איבר בG/G^2 . אזי $(gG^2)^2 = g^2G^2 = G^2$ כי מהגדרה $g^2 \in G^2$. קיבלנו שכל איבר בריבוע שווה ליחידה, כלומר, הסדרים האפשריים הם 1 או 2.

(ה) תנו דוגמא לחבורה G כך ש G/G^2 שווה לחבורה הטריוויאלית.

פתרון:

בשביל שיתקיים G/G^2 שווה לחבורה הטריוויאלית, צריך שיהיה רק קוסט אחד. מכיוון שG^2 הוא תמיד אחד הקוסטים, וכל איבר $x \notin G^2$ יוצר קוסט שונה מG^2, צריך שיתקיים $G = G^2$. כלומר, לכל איבר יש שורש בחבורה. נקח למשל את $\mathbb{Z}_3$. $\mathbb{Z}_3 = \{0^2, 2^2, 2^2\} = \{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2 \mod 3\} = \{0, 2, 1\} = \mathbb{Z}_3$.

בהצלחה!