לינארית 2 - מטלה 3 - לכסינות, פ"א, פ"מ, קיילי המילטון.

תאריך הגשה: אחרי פסח כל אחד בקבוצת תרגול שלו.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. מספר תרגיל
2. שם מלא
3. ת.ז
4. מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.

תרגיל 1. חשב את את A^{-2}, A^{12} עבור המטריצה (רמז: משפט קיילי המילטון)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון. הפ"א הוא

$$\begin{aligned}f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}\right| \\ &= \lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{pmatrix}\right|-\left|\begin{pmatrix}-1&0\\\lambda&-1\end{pmatrix}\right| \\ &= \lambda^3-1\end{aligned}$$

לפי קיילי המילטון

$$A^3=I$$

כלומר $A^{-2}=A$

בנוסף

$$A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I$$

תרגיל 2. עבור המטריצות הבאות מצא את הפולינום האופייני והמינימלי.

1. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$

פתרון. : הפ"א הוא

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda+2)\left|\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda+2)\left[(\lambda-3)(\lambda+1)+4\right] \\ &= (\lambda+2)\left(\lambda^2-2\lambda+1\right) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

הפ"מ הוא יהיה $(\lambda-1)(\lambda+2) = m_A(\lambda)$ או $m_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$ נציב באופציה הראשונה ונקבל

$$m_A(A) = (A+2I)(A-I) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

.2 $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

פתרון. : הפ"א הוא

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-8 & -3 & 3 \\ 6 & \lambda+1 & -3 \\ -12 & -6 & \lambda+4 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

את הפיתוח של הדטרמיננטה אני משאיר לכם.
הפ"מ הוא יהיה $(\lambda+1)(\lambda-2) = m_A(\lambda)$ או$m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$ נציב האופציה הראשונה ונקבל

$$m_A(A) = (A-2I)(A+I) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

תרגיל 3. לכסן את המטריצות מהשאלה הקודמת

פתרון. : כבר מצאנו שע"ע הם $\lambda = -2, 1$ כעת נמצא את הו"ע
$\lambda = 1$: צריך למצוא בסיס ל-

$$N\left[\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}\right] = Span\left\{\left(\frac{3}{20}, -\frac{3}{10}, 1\right)\right\}$$

נשים לב שהריבוי הגאומטרי קטן ממש מהריבוי באלגברי ולכן היא איננה לכסינה.

פתרון. : כבר מצאנו שע"ע הם $\lambda = 2, -1$ כעת נמצא את הו"ע
$\lambda = -1$: צריך למצוא בסיס ל-

$$N\left[\begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \\ -12 & -6 & 3 \end{pmatrix}\right] = Span\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

$\lambda = 2$: צריך למצוא בסיס ל-

$$N\left[\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -3 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = span\left\{\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

תרגיל 4. עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל $\mathbb{R}$
2. מעל $\mathbb{C}$

פתרון. :
ראשית נמצא את הע"ע של המטריצה

$$p_A(\lambda) = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - a\right] = (\lambda-1)\left[\lambda-1+\sqrt{a}\right]\left[\lambda-1-\sqrt{a}\right]\lambda$$

לכן העע הם $\lambda = 1, 1-\sqrt{a}, 1+\sqrt{a}$

- אם $a > 0$ אז יש לנו שלושה עע ממשיים שונים ולכן היא לכסינה ב-$\mathbb{R}$ וב-$\mathbb{C}$
- אם $a < 0$ אז יש לנו שלושה עע מרוכבים שונים ולכן היא לכסינה ב- $\mathbb{C}$ אבל לא לכסינה ב-$\mathbb{R}$
- אם $a = 0$ אז יש לנו עע אחד $(\lambda = 1)$ הוא בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1 ולכן היא איננה לכסינה (לא ב-$\mathbb{C}$ ולא ב-$\mathbb{R}$)

תרגיל 5. עבור אילו ערכי kהמטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$

פתרון. :
ראשית נמצא את הע"ע של המטריצה

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-(k+3) & 0 & 0 \\ k+3 & \lambda-k & -(k+3) \\ k+3 & -k & \lambda-(k+3) \end{pmatrix}\right| = (\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3)) - k(k+3)\right] = \\ &= (\lambda-(k+3))\left[(\lambda-k)(\lambda-(k+3)) - k(k+3)\right] = \lambda(\lambda-(k+3))(\lambda-(2k+3)) \end{aligned}$$

לכן העע הם $\lambda = 0, k+3, 2k+3$
אם $k \neq -3, 0, -\frac{3}{2}$ כל הע"עים שונים לכן היא לכסינה.

- עבור $k=-3$ הע"עים הם $\lambda=0,0,-3$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי (שווה ל-2) ולכן היא לכסינה.
- עבור $k=0$ הע"עים הם $\lambda=0,3,3$ הריבוי הגאומטרי של 3 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2ולכן היא לא לכסינה.
- עבור $k=-\frac{3}{2}$ הע"עים הם $\lambda=0,\frac{3}{2},0$ הריבוי הגאומטרי של 0 שווה 1 בעוד שהריבוי האלגברי שווה ל-2 ולכן היא לא לכסינה.

לסיכום המטריצה לא לכסינה עבור $k=0,-\frac{3}{2}$

תרגיל 6. תהי סדרת $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$ סדרת פיבונצי המוגדרת כעל ידי כלל נסיגה

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_0=0 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad n>2 \end{cases}$$

1. מצא A כך ש-$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n+a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. חשב את A^{n-1} . (רמז: לכסן את המטריצה, לא להבהל אם החישובים לא יפים)

פתרון.

אם נלכסן אותה נקבל ש-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1} &= \left(\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)^{n-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt5}{2}\\ -1 & \frac{1+\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\frac{1-\sqrt5}{2}\\ -\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}\frac{1-\sqrt5}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n}\\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt5}{2}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. ניתן להסיק ש-$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, העזרת זה מצא את הנוסחא ל-a_n.

פתרון.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix} &= A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}\frac{1-\sqrt5}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n}\\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt5}{2}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}\\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לסיכום קבלנו ש-

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n}\\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$$

לכן

$$a_n = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n}\right)$$

בהצלחה!!