שיעורי בית מספר 3

1. ב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית נגדיר $W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

מצאו בעזרת גרם שמידט בסיס אורתונורמאלי ל W.

פתרון : נסדר את הבסיס של W כך : $\left\{v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

ונפעיל גרם שמידט:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \tfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} - \tfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \\
w_3 &= v_3 - \tfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \tfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \tfrac{3/2}{6/4}\cdot\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ננרמל את הוקטורים ונקבל

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס או"נ ל W.

2. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, נגדיר מכפלה פנימית על V כך:

$$\forall f, g \in V : \langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{2} f(i)g(i)$$

(א) עבור $f(x) = x, g(x) = x^2 + 4x - 3$ חשבו את $\langle f, g\rangle$.

פתרון : לפי הגדרה

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{3} f(i)g(i) = 0^2\cdot\left(0^2 + 4\cdot 0 - 3\right) + 1^2\cdot\left(1^2 + 4\cdot 1 - 3\right) + 2^2\cdot\left(2^2 + 4\cdot 2 - 3\right) = 2 + 36 = 38$$

(ב) מצאו בסיס או"ג ל V.

פתרון : נפעיל גרם שמידט על $B=\left\{1,x,x^2\right\}$ בסיס של V:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ w_2 &= x - \frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}1 = x-\frac{3}{3} = x-1 \\ w_3 &= x^2 - \frac{\left\langle x^2, x-1\right\rangle}{\|x-1\|^2}(x-1) - \frac{\left\langle x^2,1\right\rangle}{\|1\|^2}1 = \\ &= x^2 - \frac{4}{2}(x-1) - \frac{5}{3} = x^2-2x+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. תהא $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x)\mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה D- אינווראינטים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

פתרון:

יהא W ת"מ D- איוואראנטי שונה מאפס. יהא $p(x)\in D$ בעל הדרגה המקס', נסמנה d. כיוון ש Wהוא D - אינוואראנטי אזי $p'(x)\in W$ וגם $D(p(x))=p'(x)\in W$ וגם $D^2(p(x))=p"(x)\in W$ ובאופן דומה לכל $0\le i\le d$ מתקיים כי

$$D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\in W$$

כאשר $p^{(i)}(x)$ פירושו הנגזרת ה i- ית של $p(x)$. כיוון ש $p(x)$ מדרגה d נקבל כי $D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\neq 0$ לכל $0\le i\le d$. ולכן מצאנו $\left\{D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\right\}_{i=0}^{d}\subseteq$ $W\subseteq\mathbb{R}_d[x]$ קבוצה בת"ל. כיוון ש

$$d+1=\dim span\left\{D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\right\}_{i=0}^{d}\le\dim W\le\dim\mathbb{R}_d[x]=d+1$$

נקבל כי $W=\mathbb{R}_d[x]$ (כי $W\subseteq\mathbb{R}_d[x]$ מאותו מימד).

בנוסף כיוון ש $\mathbb{R}_d[x]$ לכל $0\le d\le n$ הוא ת"מ D- אניוואראנטי נקבל שאלו כל ת"מ ה D- אינוואראנטים היחידים (עם תת מרחב האפס).

4. יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או"נ. נגדיר מטריצה $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך: עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j. כלומר $P=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי $P^tP=I$

פתרון : מחישוב ישיר

$$[P^tP]_{i,j}=v_i^t\cdot v_j=\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר $P^tP=I$

(ב) הוכיחו $det(P) \in \{\pm 1\}$

פתרון : מכפליות הדטרמיננטה נקבל

$$\left|P^t\right| \cdot |P| = |I| = 1$$

כיוון ש $\left|P^t\right| = |P|$ נקבל $1 = |P|^2$ וכיוון ש $|P|$ מספר ממשי נסיק כי $|P| \in \{\pm 1\}$

5. נגדיר $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y + 3z$$

ונגדיר קבוצה $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} = S$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v \in S} f(v)$$

[רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$]

פתרון : לפי קושי שוורץ במרחב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלארית ו $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ נקבל ש

$$2x + y + 3z = |\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{14}$$

ולכן עבור $v \in S$ נקבל $2x + y + 3z \leq \sqrt{14}$ כלומר $\max_{v \in S} f(v) \leq \sqrt{14}$. נראה כי מתקיים שיוון. אכן עבור $t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ו $\frac{t}{\|t\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$ מתקיים כי

$$f\left(\frac{t}{\|t\|}\right) = \left\langle \frac{t}{\|t\|}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{14}$$

וסיימנו.

6. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ (עם מ"פ $\langle v, v'\rangle$) ויהא $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס או"נ הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים כי

$$\langle v, v\rangle = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

פתרון : נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ שזה שקול לכך ש $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ואז

$$\langle v, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j\rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

כאשר מעברים (1) נובעים מתכונות הבסיס של השאלה. וסיימנו.

7. יהא $(V, \langle\rangle)$ ממ"פ. ויהיו S, S_1, S_2 ת"ק של V.

(א) הוכיחו כי אם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.
פתרון : יהא $v \in S_2^\perp$ אזי $\forall s \in S_2 : \langle v, s\rangle = 0$ בפרט $\forall s \in S_1 : \langle v, s\rangle = 0$ (בגלל ההנחה $S_1 \subseteq S_2$) ולכן $v \in S_1^\perp$.

(ב) הוכיחו כי $S^\perp = [span(S)]^\perp$
פתרון : בכיוון $(\subseteq)$ כיוון ש $S \subseteq span(S)$ + הסעיף הקודם.
בכיוון $(\supseteq)$ יהא $v \in S^\perp$ אזי $\forall s \in S : \langle v, s\rangle = 0$. צ"ל כי : $\forall u \in span(S)$
$\langle v, u\rangle = 0$ יהא $u = \sum \alpha_s \cdot s$ צ"ל סופי של איברי S אזי

$$\langle v, u\rangle = \left\langle v, \sum \alpha_s \cdot s \right\rangle = \sum \bar{\alpha_s} \langle v, s\rangle = \sum \bar{\alpha_s} 0 = 0$$

כנדרש.