תרגיל 6

1. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^1(X,\mu)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית. הראו ש $\lim_{\alpha\to 1-}\int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$.

פתרון: נגדיר $A=\{x: f(x)>1\}$. אזי, מכיוון ש $0<\alpha<1$ נובע כי $f^\alpha(x)\uparrow f(x)$ כאשר $\alpha\to 1$. כמו כן, על A^c נובע כי f^α נשלטת ע"י הפונקציה 1_{A^c} אשר אינטגרבילית כיוון שהמידה הינה סופית. מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ומשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\int_X f d\mu = \lim_{\alpha\to 1-}\int_X f^\alpha d\mu = \lim_{\alpha\to 1-}\left(\int_{A^c} f^\alpha d\mu + \int_A f^\alpha d\mu\right)$.

2. נניח ו μ הינה מידה סופית . הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{x: f(x)\geq n\}\right)<\infty$.

פתרון:

$\Leftarrow$: אם f אינטגרבילית. נרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{x: f(x)\geq n\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int 1_{(\{x: f(x)\geq n\})}d\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{x: f(x)\geq n\}}d\mu$$
$$=\int\sum_{n=1}^{\infty}n_{\{x:n+1>f(x)\geq n\}}d\mu$$

הפונקציה $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n_{\{x:n+1>f(x)\geq n\}}$ הינה למעשה $\lfloor f(x)\rfloor$ פונקצית פלור, השלם הגדול ביותר מכל השלמים שקטנים מהערך $f(x)$. כך שלמעשה הפונקציה $g(x)$ נשלטת ע"י הפונקציה $f(x)$ ולכן אינטגרבילית.

$\Rightarrow$: אם הטור מתכנס. אזי נוסיף את פונקצית האינדיקטור ונקבל כי $f(x)\leq g(x)+1$. כמו כן, $g(x)+1$ אינטגרבילית כי המידה הינה סופית ולכן גם f אינטגרבילית.

3. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות אי- שליליות f_n השואפות לאפס נקודתית כך ש $\lim_{n\to\infty}\int f_n = 0$ אבל לא קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_n < g$ לכל n.

פתרון: ניקח את סדרת הפונקציות הבאות:

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n-1 \le x \le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

קל לראות כי $f_n \to 0$ וגם כי $\int f_n = \frac{1}{n} \to 0$. אם $f_n < g$, אזי בהכרח $\int f_n < \int g$ לכל n. מכאן ש $\int_{\mathbb{R}} gdm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g1_{\{n-1\le x\le n\}}dm \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}dm = \infty$.

4. מצאו פונקציה $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ולא אינטגרבילית לבג אך כך שהאינטגרל רימן הלא אמיתי שלה קיים. כלומר, אנו רוצים ש $\int_0^1 |f|dm = \infty$ אבל ש $\lim_{a\to 0^+} R\left(f1_{(a,1]}\right)$ קיים.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $f = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$.

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\sin {}^1\!/_x}{x}dx \overset{y={}^1\!/_x}{=} \lim_{a\to 0^+}\int_1^{{}^1\!/_a}\frac{\sin y}{y}dy = \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{\cos}{y}\Big|_1^{{}^1\!/_a} - \int_1^{{}^1\!/_a}\frac{\cos y}{y^2}dy\right)$$

אבל ברור כי $\lim_{a\to 0^+} -\frac{\cos(y)}{y}\Big|_1^{{}^1\!/_a} < \infty$ וגם כי $\lim_{a\to 0^+}\int_1^{{}^1\!/_a}\frac{\cos y}{y^2}dy \le \lim_{a\to 0^+}\int_1^{{}^1\!/_a}\frac{1}{y^2}dy = \int_1^{\infty}\frac{1}{y^2}dy < \infty$

ולכן האינטגרל קיים.

לעומת זאת, לכל $a > 0$ הפונקציה f רציפה בקטע $(a,1)$ ולכן נובע כי היא אינטגרבילית רימן ולבג . עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית והעובדה שכאשר אינטגרל רימן קיים אזי הוא שווה לאינטגרל לבג נובע כי

$$\int_0^1\left|\frac{\sin {}^1\!/_x}{x}\right|dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1\left|\frac{\sin {}^1\!/_x}{x}\right|dx = \lim_{a\to 0^+}\int_0^1\left|\frac{\sin {}^1\!/_x}{x}1_{(a,1]}(x)\right|dx \overset{y={}^1\!/_x}{=} \lim_{a\to 0^+}\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin y}{y}1_{(1,\frac{1}{a}]}(y)\right|dy$$

$$= \lim_{c\to\infty}\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin y}{y}1_{(1,c]}(y)\right|dy$$

מכיוון שהגבול קיים לכל סדרה שמתכנסת לאינסוף נובע כי

$$\int_{1}^{\pi(2M+1)}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_{1}^{\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy+\int_{\pi}^{\pi(2M+1)}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_{1}^{\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy$$

$$\leq\int_{1}^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dy+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k}\left|\sin y\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dy$$

$$\overset{r=y-2\pi k}{=}\int_{1}^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\left(r+2\pi k\right)\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dr$$

$$=\int_{1}^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\left(r\right)\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dr=\int_{1}^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\frac{4}{\pi+2\pi k}$$

נשאיף את M לאינסוף ונקבל כי הטור מתבדר ולכן $\int_{0}^{1}\left|f\right|dm=\infty$.