10.1.16

תורת הקבוצות

תרגול 10

סל"חים וקבוצות שבת

<u>דוגמאות:</u> ב-ω סל"ח = קבוצה לא חסומה.

(לגבי סגור ב-ω זה טריוויאלי).

ב-ω יכולים להיות שני סל"חים זרים.

למשל זוגיים ואי זוגיים. אבל לכל $\omega<\alpha$ גבולי זה לא קורה!

<u>משפט:</u> חיתוך סל"חים = סל"ח ובפרט לא ריק.

יותר מכך. אם חותכים β סל"חים עבור $\beta<\alpha$ ב-α

זה חיתוך סל"ים.

<u>דוגמאות:</u> (1) לכל $\alpha<\omega_1$ $\omega_1-\alpha$ סל"ים.

<u>הסבר:</u> $\omega_1-\alpha=\{\beta<\omega_1 \mid \beta\geq\alpha\}$ ברור שלא חסום.

סגור כי sup של איברים שגדולים מ-α גדול מ-α..

(2) לכל מונה $\omega<\alpha$. $A=\{\beta<\alpha \mid \beta \text{ גבולי}\}$

<u>הסבר:</u> לא חסום כי לכל $\beta<\alpha$ נקח $\omega+\beta$ יש.

סגור כי $\sup(A\cap\delta)=\delta\in A$. גבולי גם!

(באופן שקול במקום לדבר על sup (הצטברות) לדבר על סדרה!)

[<u>הערה:</u> נדבר באופן כללי על מונים רגולריים גדולים מ-ω.]

(3) $f:\alpha\to\alpha$. נגדיר.

קבוצת נק' הסגור של f = ~~[illegible]~~

$\{\beta<\alpha \mid \forall\gamma<\beta\ f(\gamma)<\beta\}$

שקול $f[\beta]\subseteq\beta$. ונקבל f עולה חלש

תוכח שקבוצת נק' הסגור היא סל"ח.

סגירות: תהיה $\{\beta_i\}_{i<\delta<\alpha}$ סדרה של נק' סגור.

נראה ש $\sup\beta_i$ גם נק' סגור.

כלומר אם $\gamma<\sup\beta_i$ אז $f(\gamma)<\sup\beta_i$

אז יש β_i כך ש- $\gamma<\beta_i$ כי $\gamma<\sup\beta_i$.

$\Leftarrow$ $f(\gamma)<\beta_i \Leftarrow f(\gamma)<\sup\beta_i$ כדרוש.

לא חסומה: תהיה $\beta\in\alpha$ נסתכל על $f(\beta)$.

(I) $f(\beta)<\beta$ אז לכל $\gamma<\beta$ $f(\gamma)\le f(\beta)$

$\Leftarrow$ $f(\gamma)<\beta$ כלומר β נק' סגור.

(II) ~~נניח~~ $f(\beta)=\beta$. נבדוק את $\beta+1$.

$f(\beta)<\beta+1$.

לכל $\gamma<\beta+1$, $\gamma\le\beta \Leftarrow f(\gamma)\le f(\beta)<\beta+1$

אז $\beta<\beta+1$ נקודת סגור.

(III) $f(\beta)>\beta$.

נסמן $\beta_0=\beta$, $f(\beta_n)=\beta_{n+1}$.

אם $\beta_n\ge\beta_{n+1}$ אז סיימנו כי אז

β_n או β_n+1 נק' סגור. (עבור n המינימלי)

בגלל שזה ה-n הראשון. עד אליו הסדרה

עולה ממש, לכן $\beta_n>\beta$. (מצאנו נק' סגור $\ge\beta$).

אם תמיד $\beta_n<\beta_{n+1}$ ממש. ניקח גבול $\tilde\beta=\sup\beta_n$

נראה $\tilde\beta$ נק' סגור. יהי $\gamma<\tilde\beta$.

קיים n כך ש- $\gamma<\beta_n$. $\Leftarrow f(\gamma)\le f(\beta_n)$

$\Leftarrow$ $f(\gamma)\le f(\beta_n)<\beta_{n+1} \Leftarrow f(\gamma)<\sup\beta_{n+1}=\tilde\beta$

כיוון שבסדרה עולה $\tilde\beta>\beta$ ומצאנו נק' סגור!

כדרוש!

מ.ש.ל!

④ יהא K מונה רגולרי $A\subseteq K$ $|A|=K$.

אזי $\beta=\{\alpha<K \,/\, A\cap\alpha$ קוס' ב-$\alpha\}$ היא סלים.

~~לא~~ חסום: A קוס' ב- K כי $|A|=K$ ו- K מונה.

סגירות: $\{\alpha_i\}\subset B$ סדרה. כלומר לכל i $A\cap\alpha_i$ קוס' ב- α_i.

נסמן $\alpha=\sup\alpha_i$ צ.ל $A\cap\alpha$ קוס' ב- α.

כלומר לכל $\beta<\alpha$ נמצא ~~[illegible]~~ $\beta<\gamma\in A\cap\alpha$.

$\beta<\alpha$ $\Leftarrow$ קיים i כך ש- $\beta<\alpha_i$

כך ש- $A\cap\alpha_i$ קוס' ב- α_i. לכן יש $\beta<\gamma\in A\cap\alpha_i$

$\gamma\in A\cap\alpha_i$ $\Leftarrow$ $\gamma\in A\cap\alpha$.

לא חסום: $\beta\in K$ A קוס' ב- K ולכן יש $\beta<\gamma\in A$

נסמן $\beta_1:=\gamma$, $\beta<\gamma\in A\cap\beta_1$.

נבנה סדרה β_n כך שב- $A\cap\beta_{n+1}$ יש איבר שגדול מ- β_n. נסמן $\beta^\sim=\sup\beta_n$,

נשים לב ש- $A\cap\beta^\sim$ קוס' ב- $\beta^\sim$.

וכיוון $\gamma<\beta^\sim$ $\Leftarrow$ יש n כך ש- $\gamma<\beta_n$,

ב- $A\cap\beta_{n+1}$ קיים $\gamma<\beta_n<\delta$ לכן $\gamma<\delta\in A\cap\beta^\sim$

כנדרש!

מש"ל

דוגמא: (קבוצה שאינה סלים).

נקח ב- ω_1 את $A=\omega_1-\{\omega\}$.

ברור שהיא קו-פינאלית, ולא סגורה,

כי יש סדרה $\{1,2,\dots\}$ שגבולה ω אבל $\omega\notin A$.

מסקנה: כל סלים מכיל את ~~[illegible]~~ קבוצת נקודות הסגור של איזשהי פונקציה עולה חלש.

<u>הוכחה:</u> A סל"ח ב-α. נרצה לבנות פונקציה עולה חלש $f:\alpha\to\alpha$ כך שנק' הסגור שלה ה-A.

ונגדיר $f(\beta)=\min\{\gamma\in A / \gamma\geq\beta\}$

נראה ש-f עולה חלש. אם $\gamma<\beta$ אז ברור ש- $f(\gamma)\leq f(\beta)$. [יכול להיות שהאיבר הראשון ב-A אחרי β הוא גם הראשון שאחרי γ] -

נראה שנק' הסגור של f נמצאות רק ב-A.

נראה שכל נק' סגור של f היא בהכרח סודר גבולי.

ונניח $\delta+1=\beta$ $f(\delta)\geq\delta$ מהגדרה...

ובפרט $f(\beta)\geq\beta$. אז β לא סגור!

תהיה β סגור. היא בהכרח גבולית.

לכל $\gamma<\beta$, $f(\gamma)<\beta$,ו סב"ר $\beta=\sup\limits_{\gamma<\beta}\gamma$

לכל $\gamma<\beta$ $f(\gamma)\leq f(\beta)$.

לכן $f(\beta)\geq\sup\limits_{\gamma<\beta}f(\gamma)$. $f(\gamma)<\beta \Rightarrow \sup\limits_{\gamma<\beta}f(\gamma)\leq\beta$.

$f(\gamma)\geq\gamma \Rightarrow \beta\geq\sup f(\gamma)\geq\sup\gamma=\beta$

לכן $\beta=\sup\limits_{\gamma<\beta}f(\gamma)$ $f(\gamma)\in A$ מהגדרת הפונקציה.

כיוון ש-A סגורה גם $\beta=\sup f(\gamma)\in A$ כרצינו.

מש"ל!

<u>מסקנה:</u> אוסף הסל"חים ב-α ואוסף קבוצות נק' הסגור של פונקציות עולות חלש מגדירים את אותו מסנן.

<u>הערה:</u> כל קבוצת נקודות סגור היא סל"ח ולכן גם

$B\supseteq$ קבוצת נק' סגור $\leftarrow$ B מכיל סל"ח.

מצד שני כל סל"ח מכיל קבוצת נקודות סגור.

לכן אם B מכיל סל"ח, היא מכילה קבוצת נק' סגור.

הגדרה: חיתוך אלכסוני של $\langle A_\alpha / \alpha<\beta \rangle$

$$\Delta A_\alpha = \{\gamma / \gamma\in A_\beta \ / \beta<\gamma\}$$

משפט: חיתוך אלכסוני של κ סל"חים ב-κ הוא סל"ח.
(בחיתוך רגיל לוקחים פחות מ-κ!).

דוגמה: לכל $\kappa>\alpha$ $A_\alpha=\kappa-\alpha$ הוא סל"ח.
$\Delta A_\alpha = \kappa$ גם סל"ח.

הגדרה: קבוצה $C\subseteq\alpha$ קבוצה שבת אם היא נחתכת עם כל סל"ח בצורה לא ריקה.

דוגמאות: (1) כל סל"ח הוא קבוצה שבת.
חיתוך של סל"חים = סל"ח ולכן לא ריק.

(2) נניח κ מונה רגולרי. $\lambda=cof(\lambda)<\kappa$
קבוצת S הסודרים מקופינליות λ היא שבת.

הוכחה: נראה שכל סל"ח ב-κ מכיל סודר מקופינליות λ.
כלומר קבוצה שבת נחתכת עם S סלוק.
יהיה $\alpha\in A$ סל"ח. נבנה $f:\lambda\to A$

עבור $0\mapsto\alpha$

בקבוצה A.

אם $\beta<\alpha$ אז $f(\beta+1)=\min\{\gamma\in A / f(\beta)<\gamma\}$

קיים כי A קופינלי

אם $\beta<\alpha$ גבולי אז

$$f(\beta)=\sup_{\gamma<\beta} f(\gamma)\in A$$

סגורה.

אז $\sup_{\beta<\lambda} f(\beta)\in A$ (סגורה). והוא מקופינליות λ שאנו בנינו בקודם.

כנדרש!

מ.ש.ל.!

<u>תרגיל:</u> מצאו קבוצה שבת שאינה סל״ח.

<u>פתרון:</u> (1) $A=\omega_1-\{\omega\}$, כמובן לא סל״ח (סגורה) - היא שבת, כמובן שהיא נחתכת עם כל סל״ח באופן לא ריק כי רק $\{\omega\}\cap A=\phi$ - ! $\{\omega\}$ אינו סל״ח! . כדרוש!

<u>מ.ש.ל!</u>

(2) הקבוצה השניה שהראנו שהיא שבת אינה סל״ח. (מהתרגיל הקודם).

<u>הסבר:</u> למשל $\kappa=\omega_2$ $\lambda=\omega$.

ω_1 הוא גבול על פני ω_1 סודרים מקופינליות ω. אבל $cof(\omega_1)=\omega_1$.

<u>מ.ש.ל!</u>

<u>תרגיל:</u> הוכח. אם $\bigcup_{n<\omega} S_n$ שבת אז אחד מה-S_n שבת.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שכל S_n לא שבת.

לכל S_n יש A_n סל״ח כך ש-$A_n\cap S_n=\phi$.

ידוע שחיתוך ω סל״חים סל״ח (שבוע → עובדים מעל)

לכן: $\bigcap A_n$ סל״ח. לכן $\bigcup S_n\cap(\bigcap A_n)=\phi$.

לכן $\bigcup S_n$ אינה שבת בסתירה! <u>מ.ש.ל!</u>

<u>למה</u> חיתוך של סל״ח וקבוצה שבת הוא קבוצה שבת.

<u>הוכחה</u> A סל״ח. S שבת. נראה $S\cap A$ שבת.

$$S=S\cap A\ \dot\cup\ S\setminus A$$

S שבת, לכן $S\setminus A$ <u>או</u> $S\cap A$ שבת.

אבל $S\setminus A$ לא יכולה להיות שבת! שכן $S\setminus A\cap A=\phi$

ו-A סל״ח. לכן בהכרח $S\cap A$ שבת! כדרוש.

<u>מ.ש.ל!</u>

<u>למה</u> חיתוך קבוצות שבת לא בהכרח קבוצות שבת.

ולמשל קיימת קבוצה שבת כך שבמשלימה שלה גם שבת.