פתרון תרגיל 4

<u>שאלה 1</u>

הוכח או הפרך שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה:

א. $X=[0,\infty) \quad \tau=\{\varnothing, X, (a,\infty): \quad a\geq 0\}$

זו טופולוגיה: 1) $\varnothing, X\in\tau$ מההגדרה.

2) חיתוך סופי. נשים לב שלכל $U,V\in\tau$ מתקיים $(U\subseteq V)\vee(V\subseteq U)$ (בדקו!) לכן בהכרח $U\cap V\in\tau$.

3)איחוד כלשהו. מ"ל שאם קיימת משפחה של אינדקסים I כך שלכל $i\in I$ $a_i\geq 0$ אזי $\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)\in\tau$ (מדוע?) אבל טענה זו נכונה שכן

(*) $\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)=(a,\infty)$ באשר $a=\inf\{a_i: \quad i\in I\}$ וברור שבמקרה זה גם מתקיים $a\geq 0$

נוכיח את (*) באמצעות הכלה דו כיוונית:

$(\subseteq)$: יהי $x\in\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)$ אזי קיים $i_0\in I$ כך ש $x>a_{i_0}$. מכיון ש $a_{i_0}\geq a$ נקבל $x>a$ ולכן $x\in(a,\infty)$.

$(\supseteq)$: יהי $x\in(a,\infty)$ ונניח בשלילה ש $x\notin\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)$ אזי לכל $i\in I$ מתקיים $a_i\geq x$. מכאן x חסם מלרע של $\{a_i: \quad i\in I\}$. כעת $a=\inf\{a_i: \quad i\in I\}$ ו x חסם מלרע של $\{a_i: \quad i\in I\}$ מהגדרת אינפימום נקבל $a\geq x$ בסתירה לכך ש $x\in(a,\infty)$.

ב. $X=\mathbb{N} \quad \tau=\{\varnothing, X, A: \quad$ תת קבוצה אינסופית ב- $\mathbb{N}$ $A\}$

זאת אינה טופולוגיה. שכן חיתוך של שתי תת קבוצות אינסופיות אינו בהכרח תת קבוצה אינסופית. למשל: $\{1,2,4,8,16.....\},\{1,3,9,27...\}\in\tau$ אך $\{1,2,4,8,16.....\}\bigcap\{1,3,9,27...\}=\{1\}\notin\tau$.

<u>שאלה 2</u>

א. נוכיח את שלוש התכונות:

1. $\varnothing\in\tau_{co-\aleph_0}$ מההגדרה, $X\in\tau_{co-\aleph_0}$ מכיוון ש- $\left|X^C\right|=|\varnothing|<\aleph_0$
2. יהיו $U,V\in\tau_{co-\aleph_0}$. מקרה ראשון: $U=\varnothing \ \vee V=\varnothing$ אזי $U\bigcap V=\varnothing\in\tau_{co-\aleph_0}$.

מקרה שני: $\left|U^c\right|,\left|V^c\right| \le \aleph_0$ אזי

$$\left|\left(U \bigcap V\right)^C\right| = \left|U^C \cup V^C\right| \le \left|U^c\right| + \left|V^c\right| \le \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

3. יהיו $\{U_i\}_{i\in I} \in \tau_{co-\aleph_0}$. מקרה ראשון: $\forall i \;\; U_i = \varnothing$ אזי $\bigcup_{i\in I} U_i = \varnothing \in \tau_{co-\aleph_0}$.

מקרה שני: קיים $i_0 \in I$ כך שהקבוצה ${U_{i_0}}^C$ בת מניה. $U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ ומכאן

${U_{i_0}}^c \supseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C$ ולכן נסיק שגם $\left|\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C\right| \le \aleph_0$ ו $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_{co-\aleph_0}$.

הערה: ניתן היה מראש לעבור למשלים ולציין שקבוצה היא סגורה אם ורק אם היא בת מניה או המרחב כולו ואז להוכיח שאכן מתקיימות שלוש התכונות המאפיינות קבוצות סגורות .

ב. נוכיח הכלה דו כיוונית. ברור ש- $\tau_{co-\aleph_0} \subseteq \tau_{disc}$ שכן $\tau_{disc} = P\left(X\right)$. נראה את ההכלה השניה. למעשה, יש להראות שכל תת קבוצה ב- X היא פתוחה לפי $\tau_{co-\aleph_0}$.

תהי $A \subseteq X$. מכיוון ש- $\left|X\right| \le \aleph_0$ מתקיים $\left|A^C\right| \le \aleph_0$ ולכן $A \in \tau_{co-\aleph_0}$.

ג. כן, מכיון שהטופולוגיה הדיסקרטית מושרית מהמטריקה הדיסקרטית.

<u>שאלה 3</u>

א. קבוצה ריקה: מתקבלת כאיחוד ריק.

המרחב כולו: מתקבל כאיחוד של $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n)$.

סגירות ביחס לחיתוך סופי: מספיק להתבונן בשתי קבוצות מהצורה $[a,b),[c,d)$ (מדוע?). יתכנו שתי אפשרויות: אם החיתוך ריק, הטענה מתקיימת. אחרת, $[a,b)\cap[c,d) = [e,f)$ כאשר $e = \max\{a,c\},\ f = \min\{b,d\}$.

סגירות ביחס לאיחוד: טריוויאלי.

ב. ברור ש $T \not\subset \tau$ כי למשל $[2,3) \in T \setminus \tau$. נראה ש $\tau \subseteq T$ וזה יוכיח בסה"כ ש- $\tau \subset T$. תהי $O \in \tau$ אזי לכל $x \in O$ קיים $\varepsilon_x > 0$ (יש תלות ב x) כך ש $B(x,\varepsilon_x) \subseteq O$. מתקיים $O \subseteq \bigcup_{x\in O}\left[x, x+\varepsilon_x\right) \subseteq \bigcup_{x\in O} B(x,\varepsilon_x) \subseteq O$, לכן $O = \bigcup_{x\in O}\left[x, x+\varepsilon_x\right)$ ומכאן $O \in T$.

ג. נוכיח ש הסדרה $\frac{1}{n}$ מתכנסת ל 0 במ"ט זה. תהי U סביבה פתוחה של 0 אזי U איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ לכן קיים קטע $[a,b)$ כך ש $0\in[a,b)\subseteq U$.

$a\le 0<b$ ולכן גם מתקיים $0\in[0,b)\subseteq[a,b)\subseteq U$. $0<b$ ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $b>\frac{1}{n_0}$. מתקיים לכל $n\ge n_0$ $0<\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<b$. מכאן לכל $n\ge n_0$

$\frac{1}{n}\in(0,b)\subseteq[0,b)\subseteq[a,b)\subseteq U$.

הערה: מכלתחילה היה ברור שאם $\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$ אז $x=0$ שכן $\tau\subset T$ ומטענה שהזכרנו בתרגול נובע שאם $\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$ אז גם $\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$ אבל אנו יודעים ש $\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$ אם ורק אם $x=0$ (למה?).

<u>שאלה 4</u>

כדי להוכיח ש τ הטופולוגיה הדיסקרטית, מ"ל שלכל $x\in X$ הנקודון $\{x\}$ פתוח. X אינסופית- ידוע מבדידה שקיימות A,B זרות כך ש $A\cup B=X$ וגם A,B אינסופיות. בה"כ $x\in A$. מתקיים $A,B\cup\{x\}$ אינסופיות ולכן $A,B\cup\{x\}\in\tau$. τ טופולוגיה ולכן סגורה לחיתוך סופי ומכאן $\{x\}=A\cap\left(B\cup\{x\}\right)\in\tau$.

<u>שאלה 5</u>

במ"ט טריויאלי - לכל סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ ולכל $x\in X$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל x. זה נכון משום שהסביבה היחידה של x במ"ט טריוויאלי היא X וכמובן כל איברי הסדרה בסביבה זו.

<u>שאלת בונוס</u>

נפלה טעות בשאלה. היה כתוב $0\in l_\infty$. הכוונה היתה $0\in\mathbb{R}$.

מכיון שמדובר במ"מ אז כדי להוכיח ש c_0 סגורה, שקול להוכיח שאם סדרה ב c_0 מתכנסת לאיבר ב l_∞ אז הגבול שייך ל c_0 . מכיון שכל איבר ב l_∞ הוא בעצמו סדרת ממשיים חסומה

נשתמש באינדקסים כפולים. נניח $c_0 \supseteq \left\{\left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow[m\to\infty]{} \left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ ונראה ש $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. כלומר שהסדרה $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת לאפס.

הסבר: לכל $m \in \mathbb{N}$, $\left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ הוא איבר ב c_0 (זוהי סדרה המתכנסת לאפס) ,

$\left\{\left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ היא סדרה ב c_0 שכל אחד מאיבריה הוא סדרת ממשיים חסומה המתכנסת לאפס.

הקושי בשאלה הוא הסימונים.

לכל $m \in \mathbb{N}$, $\left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (מהגדרת c_0). כמו כן מהגדרת התכנסות ב l_∞ נקבל ש $\sup\left\{| x_n^{(m)} - y_n |: n \in \mathbb{N}\right\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. ניתן להיעזר באי השויון הבא ובהתכנסויות שציינו לקבל הדרוש (בדקו!) : לכל $n,m \in \mathbb{N}$

מתקיים $\left|y_n\right| \le | x_n^{(m)} - y_n | + | x_n^{(m)} | \le \sup\left\{| x_n^{(m)} - y_n |: n \in \mathbb{N}\right\} + | x_n^{(m)} |$