משפט סטוקס

$$* \quad \int_{\partial M} \omega = \int_{M} d\omega$$

אינטגרל (k+1) מימדי   אינטגרל k-מימדי

תזכורת: $d\omega$ ‏(k+1) תבנית $\longrightarrow$ ω-k תבנית

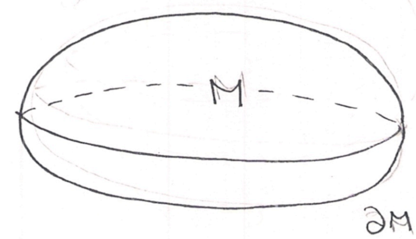
M יריעה (k+1) מימדית $\longrightarrow$ ∂M יריעה k-מימדית.

<u>הערה</u>: הנוסחא * נכונה רק אם ל-∂M אוריינטציה המושרית מ-M, אחרת צריך להופיע סימן – בכדי שהשוויון יהיה נכון.

במרבית המקרים משתמשים את המשפט במקרים הבאים:

משפט גאוס/דיברגנץ

3



$$\int_{M} d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

M: 3-תבניות; ∂M: 2 תבניר

ב-$\mathbb{R}^2$ משפט גרין
ב-$\mathbb{R}^3$ משפט סטוקס

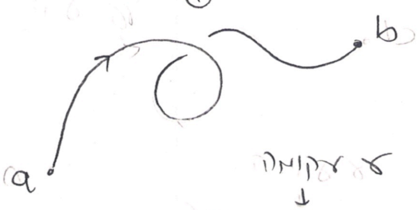
2

$$\int_{D} d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

D: 2 תבנית; ∂D: 1 תבנית

המשפט היסודי של החדו"א

1



γ עקומה
$\downarrow$
$\partial\gamma = +b-a$

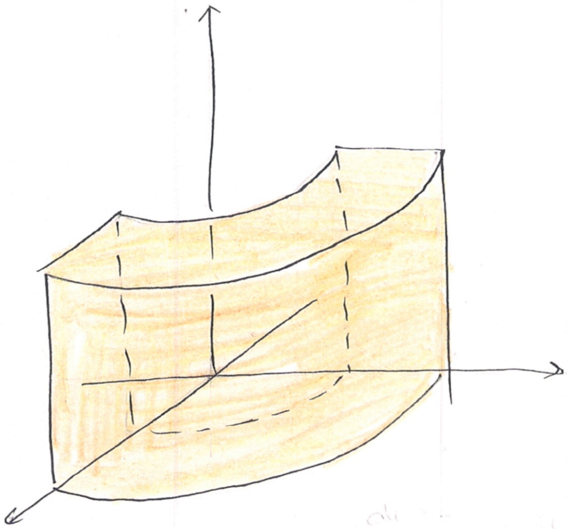
$$\int_{\gamma} d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega = \omega(b) - \omega(a)$$

γ: 1 תבנית; $\partial\gamma$: 0-תבנית (פונקציה)

באופן היסטורי – המשפטים האלה נוסחו תחילה בשפה של שדות וקטוריים ושני המקרים הפרטיים הוכחו בנפרד.
רק מאוחר פותחה השפה של תבניות דיפרנציאליות והוכח משפט סטוקס הכללי.

תרגיל: יהי V התחום בין שני גלילים ברדיוס 1 ו-2 (שמרכזם בציר z) הנמצא בסקטור החיובי ומתחת למישור $z=2$.

תהי $\omega = -y^3 dx\wedge dz + x^3 dy\wedge dz$ חשבו את $\int_{\partial V}\omega$.



פתרון: ברצה לחשב את האינטגרל ישירות צריך למצוא פרמטריזציה של ∂V (עם אוריינטציה מושרית)

אך זה כולל 6 משטחים נפרדים ← עבודה קשה!!

ולכן... נעזר במשפט סטוקס $\int_{\partial V}\omega = \int_V d\omega$

כלומר, נחשב את אגף ימין:

נחשב את $d\omega$:

$$d\omega = -3y^2 dy\wedge dx\wedge dz + 3x^2 dx\wedge dy\wedge dz$$

$$d\omega = 3(x^2+y^2)\, dx\wedge dy\wedge dz$$

נמצא פרמטריזציה ל-V (באמצעות קואורדינטות גליליות)

$$\Omega = \left\{(r,\theta,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le z\le 2\end{array}\right\} \qquad \varphi:\Omega \longrightarrow V$$

$$(r,\theta,z) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

צריך לחשב את ה- pull-back $\varphi^* d\omega$

$$\varphi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad \varphi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \qquad \varphi_z = (0,0,1)$$

$$\varphi^* d\omega = 3(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\underbrace{\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}_{r} dr\wedge d\theta\wedge dz = 3r^3\, dr\wedge d\theta\wedge dz$$

$$\int_V d\omega = \int_\Omega 3r^3\, dr\wedge d\theta\wedge dz = \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 3r^3\, dr\, d\theta\, dz = 3\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_1^2\, d\theta\, dz$$

$$= 3\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4-\frac{1}{4}\right) d\theta\, dz = 3\cdot 3\tfrac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = 3\cdot\frac{15}{4}\pi = \frac{45\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

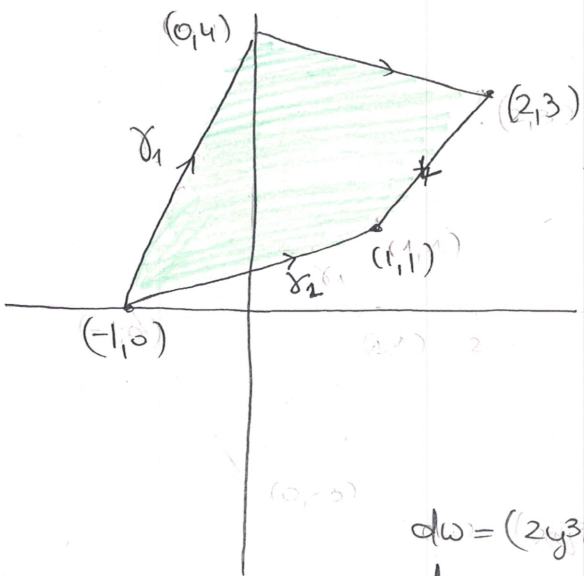
$$\int_{\partial V}\omega = \frac{45\pi}{4}$$

תרגיל: במישור נתון מרובע שקודקודיו: $(-1,0)\ (1,1)\ (2,3),\ (0,4)$

נסמן ב-D את התחום שבתוך המרובע

נתונה $\omega = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$

חשב את האינטגרל $\int_{\partial D}\omega$



פתרון: ניעזר במשפט סטוקס $\int_{\partial D}\omega = \int_D d\omega$

$$d\omega = (2y^3dx + 6xy^2dy)\wedge dx + (6xy^2dx + 6x^2ydy)\wedge dy$$

$$d\omega = 6xy^2dy\wedge dx + 6xy^2dx\wedge dy = 0$$

$d\omega = 0 \to$ ω תבנית סגורה $\Leftarrow$ $\int_{\partial D}\omega = 0 \leftarrow$ וזה בכלל לא תלוי בתחום הנתון D!

משפט: אם ω תבנית סגורה (המוגדרת לכל x בתחום) אז $\int_\gamma \omega = 0$ לכל עקומה סגורה γ.

איך זה קרה ש-$d\omega=0$?

נסתכל שוב על התבנית ω: $\omega = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ ונשים לב שהיא גם תבנית מדויקת. כלומר $\omega = df$ כאשר $f(x,y) = x^2y^3$

והרי ידוע ש $dd=0$ תמיד ובפרט $d\omega = d(df) = 0$

המשך תרגיל: נסמן ב-γ_1 את העקומה הנמצאת על החלק העליון של המרובע המחבר בין $(-1,0)$ ל-$(1,1)$ בכיוון זה. חשב את $\int_{\gamma_1}\omega$

פתרון: γ_1 היא עקומה המורכבת מ-3 ישרים ולכן חישוב האינטגרל ישירות יצריך 3 פרמטרזציות.

מצד שני ← אי אפשר להשתמש במשפט סטוקס כמו מקודם כי γ_1 לא חוסמת תחום. אבל אפשר להיעזר בעקומה נוספת.

נסמן ב-γ_2 את הקטע המתחיל ב-$(-1,0)$ ונגמר ב-$(1,1)$

אם D נתון באוריינטציה סטנדרטית אז $\gamma_2 - \gamma_1 = \partial D$ ולכן נקבל

$$0 = \int_{\partial D}\omega = \int_{\gamma_2-\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega - \int_{\gamma_1}\omega \longrightarrow \int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$$

כלומר, עבור שני המסלולים γ_1 ו-γ_2 האינטגרלים שווים!

ניזכר ← התוצאה $\int_{\partial D} \omega = 0$ לא תלויה בתחום D אלא בעובדה ש $d\omega=0$

ולכן נקבל את המשפט:

אם $d\omega=0$! γ_1 ו γ_2 הן 2 עקומות המחברות את אותן 2 נקודות

אזי

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

נחזור לתרגול ונחשב: $\int_{\gamma_2} \omega$

נמצא פרמטריזציה ל-γ_2 כקו ישר:

$$\gamma_2(t) = (-1,0) + t(2,1) = (2t-1, t)$$
$$\gamma_2'(t) = (2,1)$$

$$\gamma_2^* \omega = \left(2(2t-1)t^3 2 + 3(2t-1)^2 t^2 \cdot 1\right) dt = (2t-1)t^2(4t+6t-3)\,dt$$
$$t^2(2t-1)(10t-3)\,dt = t^2(20t^2-10t-6t+3)\,dt = (20t^4-16t^3+3t^2)\,dt$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 (20t^4-16t^3+3t^2)\,dt = \left(4t^5-4t^4+t^3\right)\Big|_0^1 = 1$$

אבל... יש עוד דרך לפשט את התרגול. נפעיל את משפט סטוקס על העקומה γ_2 והשפה שלה $\partial\gamma_2 = +(1,1) - (-1,0)$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_2} df = \int_{\partial\gamma_2} f = f(1,1) - f(-1,0) = 1^2 \cdot 1^3 - (-1)^2 \cdot 0^3 = 1$$

אם פותרים ככה המסלול עצמו, γ בין $(1,1)$ ו $(-1,0)$ ממש לא משנה.
יכולנו לשאול עבור עקומה כללית γ המחברת את 2 הנקודות האלו, מבלי לפרט מהי בדיוק.