

אלגברה לינארית – תרגיל 4

שאלה 1

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ויהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחב:

$$U = \text{span}\{1-x, x^2, x^2-x^3, -1+x-x^2+2x^3\}, W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid \begin{array}{l} p(1) = 0 \wedge \\ p(2) + p(0) = 0 \end{array} \right\}$$

מצא בסיס ומימד של תתי המרחבים הבאים:

א. U

ב. W

ג. $U+W$

ד. $U \cap W$

שאלה 2

א. יהיו $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, 2, 1, 1), v_3 = (1, 2, 1, 2)$ ויהיה $u = (x, y, z, w)$. מצא

תנאים על x, y, z, w (מערכת משוואות לינאריות) כך ש u יהיה שייך ל Span של

$$\{v_1, v_2, v_3\}.$$

ב. פתור את מערכת המשוואות שמצאת בסעיף א' על מנת לקבל וקטור כללי

ב $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ (הוא וקטור הפתרון הכללי כמובן).

ג. מצא מערכת משוואות דומה לסעיף א' עבור

$$w_1 = (1, 1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 1, 0), w_3 = (0, 0, 1, 1)$$

ד. נסמן $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}, W = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ עבור הוקטורים מהסעיפים

הקודמים. הוכח: $u \in V \cap W$ אם ורק אם u מקיים את מערכת המשוואות שמכילה את

כל המשוואות מסעיף א' וגם מסעיף ג'.

ה. מצא בסיס ל $V \cap W$ באמצעות פתרון המערכת מהסעיף הקודם.

הערה: התרגיל הזה הוא כמובן דוגמה פרטית לאלגוריתם כללי לחשב בסיס לחיתוך.

שאלה 3

יהי $\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה קטנה או שווה ל-3. יהיו בסיסים סדורים
 $B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$, $C = \{1+x, 1-x, x^2-x^3, x^2+x^3\}$ (הסדר משמאל לימין)

$$[p]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ -2a \end{pmatrix} \quad \text{א. מצא את } p(0) \text{ אם נתון}$$

$$\text{ב. מצא את } [5+x-7x^2+2x^3]_B, [5+x-7x^2+2x^3]_C$$

$$\text{ג. מצא את } [1+x^2]_C$$

$$\text{ד. מצא את מטריצות המעבר } [I]_C^B, [I]_B^C$$

שאלה 5

יהי V מ"ו ויהיו $U, W \subseteq V$ וניה $U \cap W = \{0\}$ וניה $\dim U + \dim W = \dim V$.
הוכח/הפריך: $U \oplus W = V$

שאלה 6

יהיו $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ תתי מרחבים המקיימים $\dim U_2 < \dim U_3$ וגם $U_1 + U_2 = U_1 + U_3$
האם $\dim(U_1 \cap U_2)$ קטן גדול או קטן מ $\dim(U_1 \cap U_3)$

שאלה 7

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי מספר שלם k עבורו $A^k = 0, A^{k-1} \neq 0$.

$$\text{א. הוכח כי קיים } v \in \mathbb{R}^n \text{ כך ש } A^{k-1}v \neq 0$$

ב. עבור v מהסעיף הקודם, הוכח כי הקבוצה $\{v, Av, A^2v, \dots, A^{k-1}v\}$ בת"ל

$$\text{ג. הוכח כי } A^n = 0$$

שאלה 8

תהיינה $A, B \in F^{n \times n}$ מטריצות כך ש $C(B) \cap N(A) = \{0\}$.
הוכיחו כי $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$

שאלה 9

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$. הוכיחו כי $A \cdot B \neq 0$