בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ג, מועד א'

23.08.2023, ו' באלול התשפ"ג

מרצים: אריאל ויצמן, אלעד עטייא, דורון פרלמן, ארז שיינר.
מתרגלים: שירה גרינשטיין, רועי חסון, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל, פבל שטיינר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

<u>תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.</u>.

<u>ניתן לענות משני צידי הדף.</u>.

בהצלחה!

1. (30 נק') תזכורת: ההפרש הסימטרי של קבוצות A,B מוגדר להיות:

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל קבוצה A מתקיים: $P\left(A\right)\cap P\left(P\left(A\right)\right)=\emptyset$.

(ב) לכל קבוצות A,B,C,D מתקיים: $A\Delta B=C\Delta D$ אם ורק אם $\{A,B\}=\{C,D\}$.

(ג) לכל קבוצות A,B,C מתקיים: $A\setminus B=C\setminus B$ אם ורק אם $(A\Delta C)\setminus B=\emptyset$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (14 נק') לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n\}$$

(א) הוכיחו שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים: ההפרש הסימטרי של $2n$ הקבוצות $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_{2n}$ הוא קבוצה סופית.

(ב) הוכיחו שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים: ההפרש הסימטרי של $2n-1$ הקבוצות $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_{2n-1}$ הוא קבוצה אינסופית.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (21 נק') תהי קבוצה A ויהי יחס סדר חלקי $\preceq$ על A. נגדיר פונקציה

$$f : A \to P(A)$$

ע"י:

$$f(a) = \{b \in A \mid a \preceq b\}$$

(א) הוכיחו כי f חח"ע.

(ב) נסמן ב-X את קבוצת כל האיברים המינימליים בA, ונניח $X \neq \emptyset$. הוכיחו או הפריכו:

$$f[X] = A$$

תזכורת:

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$$

זו קבוצת התמונות של איברי X.

(ג) תהי $B \subseteq A$ ונניח שקיים לקבוצה B חסם עליון $s = \sup(B)$. הוכיחו:

$$f(s) = \bigcap_{b \in B} f(b)$$

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (21 נק')

(א) נגדיר את A להיות קבוצת כל היחסים על הטבעיים:

$$A = \{R \mid R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

קבעו והוכיחו האם $|A|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$, או אחרת.

(ב) נגדיר את B להיות קבוצת כל הפונקציות ההפיכות מהטבעיים לעצמם:

$$B = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{הפיכה } f\right\}$$

הוכיחו: $|B| = \aleph$.

(ג) נגדיר את X להיות קבוצת יחסי הסדר המלאים (לינאריים) על $\mathbb{N}$:

$$X = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{יחס סדר מלא } R\}$$

קבעו והוכיחו האם $|X|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$, או אחרת.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (20 נק') תהא קבוצה אינסופית A.

(א) הוכיחו שקיים יחס סדר מלא (לינארי) על A. אסור להשתמש בעקרון הסדר הטוב, מותר להשתמש בעקרון המקסימום של האוסדורף.

(ב) הוכיחו שקיים יחס שקילות R על A כך שלכל $a \in A$ מתקיים כי $|[a]_R| = 2$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___