2807-8

הרצאה 8

תזכורת: • בסיס = פורש + בת"ל

• גודל הבסיס יחיד = $\dim V$

• פורש מינ' = בת"ל מקס' = בסיס

• כל קב' בת"ל ניתן להשלים לבסיס,
לכל קב' פורשת יש תת-קב' שהיא בסיס

- שלישי חינם: $|S|=\dim V$, S פורשת, S בת"ל

• משפט המימדים: $\dim(U_1+U_2)=\dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1\cap U_2)$

* קשר למט': מט' ריבועית הפיכה $\Longleftrightarrow$ עמודותיה בסיס
$\Longleftrightarrow$ שורותיה בסיס

מרחב הקואורדינטות

יהי V מ"ו. בהינתן בסיס $B=\{u_1,\dots,u_n\}$
ניתן להציג כל וקטור $v\in V$:

$$v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$$

בצורה יחידה.

וקטור הקואורדינטות של v ביחס ל-B:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$B' = \{w_1, \dots, w_n\} \rightsquigarrow [v]_{B'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$(v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \quad \text{:כלו'})$$

הגדרה: מט' המעבר בין B ל-B':

$$[I]^{B}_{B'} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [u_1]_{B'} & \cdots & [u_n]_{B'} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

דוגמה. $\mathbb{F}_2[x]$ $(\text{char}\,\mathbb{F} \neq 2)$

בסיס $E = \{1, x, x^2\}$

$$v = 1 + x + x^2$$

$$[v]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

בסיס $B = \{\underset{p_1}{1+x^2}, \underset{p_2}{1-x^2}, \underset{p_3}{2+x}\}$

$$[p_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [p_2]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, [p_3]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ש.ב: מט' המעבר מ-B ל-E?

$$[I]^{B}_{E} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [p_1]_E & [p_2]_E & [p_3]_E \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2=(1+x^2)+(1-x^2)=1\cdot p_1+1\cdot p_2+0\cdot p_3$$

$$[2]_B=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\rightsquigarrow [1]_B=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}$$

$$x=-(1+x^2)-(1-x^2)+(2+x)=$$
$$=-1\cdot p_1+(-1)\cdot p_2+1\cdot p_3$$

$$[x]=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$x^2=(1+x^2)-1=\frac{1}{2}(1+x^2)-\frac{1}{2}(1-x^2)$$

$$[x^2]=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{bmatrix}$$

<u>מט' המעבר מ- E ל- B</u>:

$$[I]^E_B=\begin{bmatrix}1/2&-1&1/2\\1/2&-1&-1/2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

<u>טענה</u>: מתקיים:

$$\underbrace{[I]^B_{B'}\cdot[v]_B=[v]_{B'}}_{\Uparrow}$$

כפל
מטריצה

<u>הוכחה</u>: נוכיח:

$$B=\{u_1,\dots,u_n\}$$
$$B'=\{w_1,\dots,w_n\}$$

$$\Big(\quad \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\end{bmatrix}\Big)$$

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \left(\Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right.,$$

$$v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \quad \left(\Rightarrow [v]_{B'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

סימון:

$$[I]^B_{B'} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{matrix}}_{[u_1]_{B'}} & \begin{matrix} \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} \gamma_{1n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{matrix}}_{[u_n]_{B'}} \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases} u_1 = \gamma_{11} w_1 + \dots + \gamma_{n1} w_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i1} w_i \\ u_2 = \gamma_{12} w_1 + \dots + \gamma_{n2} w_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i2} w_i \\ \vdots \\ u_n = \gamma_{1n} w_1 + \dots + \gamma_{nn} w_n \end{cases} \qquad \boxed{u_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} w_i} \ (\ast)$$

כעת נקבל:

$$\underbrace{[I]^B_{B'} \cdot [v]_B}_{\overset{?}{\parallel}} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} =$$

$$[v]_{B'}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}\alpha_1 + \dots + \gamma_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ \gamma_{i1}\alpha_1 + \dots + \gamma_{in}\alpha_n \\ \vdots \\ \gamma_{n1}\alpha_1 + \dots + \gamma_{nn}\alpha_n \end{bmatrix} \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \alpha_j$$

יוצא כי:

$$v = \sum^{n} \overset{(\ast)}{=} \sum^{n} \left(\sum^{n} \right)$$

$$v = \sum_{j=1} \alpha_j u_j = \sum_{j=1} \alpha_j \left(\sum_{i=1} \gamma_{ij} w_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_{ij} \right) w_i$$

מקדמי הצגה של v לפי B'

$$\underline{[v]_{B'}} = \begin{bmatrix} \\ i \\ \\ \end{bmatrix} \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_{ij}$$

מסקנה (משני העיגולים הירוקים השווים זה לזה) -

$$[I]^{B}_{B'} \cdot [v]_B = [v]_{B'}$$

מ.ש.ל.

<u>טענה</u>: אם B_1, B_2, B_3 בסיסים של מ"ו V אזי:

$$\boxed{[I]^{B_2}_{B_3} \cdot [I]^{B_1}_{B_2} = [I]^{B_1}_{B_3}}$$

<u>הוכחה</u>: נחשב את צד שמאל:

$$[I]^{B_2}_{B_3} [I]^{B_1}_{B_2} = [I]^{B_2}_{B_3} \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2} \\ | & & | \end{bmatrix} =$$

(וסמן: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$)

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ [I]^{B_2}_{B_3}[v_1]_{B_2} & \cdots & [I]^{B_2}_{B_3}[v_n]_{B_2} \\ | & & | \end{bmatrix} =$$

לפי הטענה
שהוכחנו הרגע

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_{B_3} & \cdots & [v_n]_{B_3} \\ | & & | \end{bmatrix} = [I]^{B_1}_{B_3}$$

מ.ש.ל.

הערה:

$$[I]^{B}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

$$\vdots$$

$$v_n = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-1} + 1 \cdot v_n$$

מסקנה:

$$\boxed{[I]^{B_2}_{B_1} = \left([I]^{B_1}_{B_2}\right)^{-1}}.$$

הוכחה:

$$[I]^{B_1}_{B_2}[I]^{B_2}_{B_1} = [I]^{B_2}_{B_2} = I$$

$$[I]^{B_2}[I]^{B_1} = [I]^{B_1} = I$$

B_1 B_2 B_1

כלומר:

$$[I]^{B_2}_{B_1} = \left([I]^{B_1}_{B_2}\right)^{-1}.$$

בפרט, מט' המעבר בין בסיסים תמיד הפיכה!

<u>דוגמה</u>: כיצד תיראה מט' המעבר ב-$\mathbb{F}^n$ מ-$B=\{v_1,\dots,v_n\}$ לבסיס הסטנדרטי $E=\{e_1,\dots,e_n\}$?

$$v_i = \begin{bmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots \\ \alpha_{ni}\end{bmatrix} \rightsquigarrow v_i = \alpha_{1i}e_1+\dots+\alpha_{ni}e_n$$

ולכן:

$$[I]^{B}_{E} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

כלומר, <u>כל מט' הפיכה</u> היא למעשה מט' מעבר בין הבסיס שהוא עמודותיה לבסיס הסטנדרטי ב-$\mathbb{F}^n$!!

<u>הערה/שימוש</u>: נניח $AB=I$ (מט' ריבועית $n\times n$).

נטען כי עמודותיה של A הן בסיס. נשים לב ש-

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \in \operatorname{Span}\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$$

$$\boxed{A}\begin{bmatrix}C_1(B)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\end{bmatrix} \in \operatorname{Span}\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Span}\{C_1(A), \dots, C_n(A)\}$$

כלומר, $e_1, \dots, e_n \in \text{Span}\{\underbrace{C_1(A), \dots, C_n(A)}\}$.

פורשת את $\mathbb{F}^n$ ומימדו n ⇐ בסיס.

לכן, $S := \{C_1(A), \dots, C_n(A)\}$

$$A = [I]_E^S$$

משמע

$$A \cdot [I]_S^E = [I]_E^S \cdot [I]_S^E = [I]_E^E = I .$$

$$[I]_S^E \cdot A = [I]_S^E \cdot [I]_E^S = [I]_S^S = I .$$

ולכן ל-A יש אותה הופכית משני הצדדים.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה:</u> ב-$\mathbb{F}_2[x]$ הציגו את $v = 1 + x + x^2$ כצ״ל של פולינומי הבסיס:

$$B = \{-x + x^2, 1 - x^2, 2 + x^2\} \qquad (\text{char}\,\mathbb{F} \neq 3)$$

<u>פתרון</u>- קודם מבקשים את $[v]_B$.

נעבור דרך הבסיס הסטנדרטי של מרחב הפולינומים:

$$E = \{1, x, x^2\}$$

$$[v]_B = [I]_B^E \cdot [v]_E = [I]_B^E \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]_B^E = \left([I]_E^B\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

צריך להפך את המטריצה ולכפול ב- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{מדרגים}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = [I]_B^E$$

לסיכום:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$1 + x + x^2 = \underline{\underline{(-1)}}(-x+x^2) + \underline{\underline{(-1)}} \cdot (1-x^2) + \underline{\underline{1}} \cdot (2+x^2) :$$

<u>שאלה</u> נניח B_1, B_2 בסיסים ל- $\mathbb{F}_n$:

$$[I]_{B_2}^{B_1} = [I]_{B_2}^{E} \, [I]_{E}^{B_1} =$$

$$= \left([I]^{B_2}_{E}\right)^{-1} \cdot [I]^{B_1}_{E} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{עמודות}\\ B_2\end{pmatrix}}_{A_2}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix}\text{עמודות}\\ B_1\end{pmatrix}}_{A_1}$$

$$\left(\begin{array}{l} B_1 = \{v_1 \cdots v_n\} \rightsquigarrow A_1 = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \\ B_2 = \{u_1, \cdots, u_n\} \rightsquigarrow A_2 = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \end{array}\right)$$

מעוניינים ב- $A_2^{-1}A_1$:

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{x}_1 & \cdots & \underline{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A_1 = A_2 \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{x}_1 & \cdots & \underline{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A_2\underline{x}_1 = C_1(A_1), \cdots, A_2\underline{x}_n = C_n(A_1)$$

נפתור את n המערכות הללו במטריצה אחת:

$$\left(A_2 \,\middle|\, \begin{matrix} | & & | \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ | & & | \end{matrix}\right) = \left(A_2 \,\middle|\, A_1\right)$$

כללי לחישוב מט' מעבר בין בסיסים ב- $\mathbb{F}^n$:

$$\boxed{\left(\begin{matrix}\text{עמודות}\\ B_2\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}\text{עמודות}\\ B_1\end{matrix}\right) \rightsquigarrow \left(I \,\middle|\, [I]^{B_1}_{B_2}\right)}$$

שלושת מרחבי המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} n\times m \end{bmatrix}$$

הגדרות:

מרחב העמודות

① $C(A) = \text{Span}_{\mathbb{F}}\{C_1(A),\dots,C_m(A)\}$

מרחב השורות

② $R(A) = \text{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$

מרחב האפס

③ $N(A) = \{\underline{x}\in\mathbb{F}^m \mid A\cdot\underline{x} = 0\}$

$$\Big(A(\underline{x}+\lambda y) = \underbrace{A\underline{x}}_{0} + \lambda \underbrace{Ay}_{0} = 0 \quad \text{בדוק מ״ו:} \Big)$$

לדוגמה, נניח $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ריבועית הפיכה. אזי:

$C(A)=\mathbb{F}^n, \quad R(A)=\mathbb{F}^n$

$N(A)=\{0\}$

מציאת בסיסים למרחבי המטריצה

מציאת בסיס	המרחב
מדרגים את A לצורה קנונית ובוחרים את השורות (בצורה המדורגת) שאינן שורות אפסים.	① R(A)
מדרגים את A לצורה קנונית ובוחרים את העמודות המקוריות של A המתאימות למשתנים התלויים.	② C(A)
מדרגים, מוצאים פתרון כללי למע' ההומ' בצורה פרמטרית ומפרקים לבסיס.	N(A)

דוגמה: מצאו בסיסים למרחבי המט':

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(A) = \text{Span}\,\{(1\ 0\ 1)\ (0\ 1\ -1)\}$

$R(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{(\ ), (\ )\}$

$$C(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$N(A) = ?$ $\quad x_3 = t \Rightarrow x_2 = t \Rightarrow x_1 = -t$

$$N(A) = \left\{\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{F}\right\} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} : t \in \mathbb{F}\right\}$$

$$N(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$(A \in \mathbb{F}^{n \times m})$ **<u>הוכחת ①, ② מהטבלה:</u>**

①: נוכיח כי השורות בצורה המדורגת שאינן שורות אפסים מהוות בסיס ל-$R(A)$.

$$CF(A) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 \\ & & & & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & \cdots & \end{bmatrix}$$

ראשית נשים לב כי: $R(A) = R(CF(A))$:

כל פעולת דירוג שומרת על מרחב השורות.

(ולכן: $R(CF(A)) \subseteq R(A) \subseteq R(CF(A))$.)

לכן עלינו להוכיח כי השורות שאינן שורות אפסים ב-$CF(A)$ הינן בסיס ל-$R(CF(A))$.

נ׳ כי $R_1,\dots,R_k$ הן השורות שאינן שורות אפסים
ב-$CF(A)$. (כלומר: $R_{k+1}=\dots=R_n=0$.)

① $\underline{\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1,\dots,R_k\} = R(CF(A))}$:

$$R(CF(A)) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1,\dots,R_n\} =$$

הגדרת מרחב השורות

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1,\dots,R_k\} + \underbrace{\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{R_{k+1}},\dots,\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{R_n}\}}_{\{0\} = \text{המרחב}} =$$

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1,\dots,R_k\}$$

② $\underline{\{R_1,\dots,R_k\}}$ בת"ל:

$$\begin{array}{lll}
 & & \quad\quad\quad\quad\quad\; i_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; i_2 \quad\quad\quad\quad\quad\; i_3 \\
R_1 & = & [\,0 \cdots 0 \;\; 1 \;\; * \cdots * \;\; 0 \;\; * \cdots * \;\; 0 \;\; * \cdots * \;\; \cdots\,] \\
 & & \quad\quad\quad\quad\;\; 0 \\
R_2 & = & [\,0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \;\; 1 \;\; * \cdots * \;\; 0 \;\; * \cdots * \;\; \cdots\,] \\
 & & \quad\quad\quad\quad\;\; \vdots \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 0 \\
R_3 & = & [\,0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \;\; 1 \;\; * \cdots * \;\; \cdots\,] \\
 & & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \vdots \quad\quad\quad\quad\;\; 0 \\
 & & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \vdots
\end{array}$$

$i_1,\dots,i_k$ – העמודות המתאימות למשתנים התלויים.

נ׳ כי: $\boxed{\sum_{p=1}^{k} \alpha_p R_p = 0}$ ⊛, נוכיח $\alpha_1=\dots=\alpha_k=0$.

נסתכל על העמודות $i_1,\dots,i_k$ של וקטור השורה הנ"ל:

$$\begin{array}{lll}
 & & \quad\quad\quad\quad\quad\; i_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\; i_2 \quad\quad\quad\quad\quad\; i_3 \\
\alpha_1 R_1 & = & [\,0 \cdots 0 \;\; \alpha_1 \;\; * \cdots * \;\; 0 \;\; * \cdots * \;\; 0 \;\; * \cdots * \;\; \cdots\,] \\
 & & \quad\quad\quad\quad\;\; 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0 \;\; * \cdots * \;\; \cdots\,]
\end{array}$$

$\alpha_2 R_2 = [0 \; - - \; - - \; 0 \; \alpha_2 \; x \; - - \; 0 \; x \; - - \;]$

$\alpha_3 R_3 = [0 \; - - \; - - \; 0 \; 0 \; - - \; 0 \; \alpha_3 \; x \; - - \; x \cdots]$

כלומר, הכניסה ה- i_1 של $\sum_{p=1}^{k} \alpha_p R_p$ היא α_1

— " — i_2 — " — היא α_2

וכן הלאה.

ומאחר שזהו וקטור האפס ⊛ (הנחנו שהצ"ל מתאפס) נקבל

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, לכן צרוף הצ"ל הטריוויאלי.

לסיכום, $\{R_1, \dots, R_k\}$ בת"ל ופורשת $\Leftarrow$ בסיס.

מ.ש.ל. ①

② בסיס למרחב העמודות. נניח:

$$B = \{C_{i_1}(A), \dots, C_{i_k}(A)\}$$

הן העמודות של A המתאימות <u>למשתנים התלויים</u>.

נרצה להוכיח כי B בסיס ל- $C(A)$.

א <u>B בת"ל</u>: נניח שיש צ"ל:

$$\sum_{p=1}^{k} \alpha_p C_{i_p}(A) = 0$$ ונוכיח $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

$\Downarrow$ מכפל מטריצה בוקטור:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \\ \\ \\ \leftarrow i_2\\ \\ \\ \\ \leftarrow i_k\\ \\ \\ \\ \end{array}} = \begin{bmatrix}\vdots\\ \\ 0\end{bmatrix}$$

במילים אחרות, זהו הוקטור:

$$\alpha_1 e_{i_1} + \cdots + \alpha_k e_{i_k}$$

לפי הבסיס הסטנדרטי.

$$\left(e_{i_p} = \quad i_p \rightarrow \begin{bmatrix}0\\ |\\ 0\\ 1\\ 0\\ |\\ |\\ 0\end{bmatrix} \right)$$

אנו יודעים כי מרחב הפתרונות נשמר תחת פעולת דירוג. לכן:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & CF(A) & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ |\\ 0\\ \alpha_1\\ 0\\ |\\ 0\\ \alpha_2\\ 0\\ |\\ |\\ 0\\ \alpha_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i_1\\ \\ \\ \\ \leftarrow i_2\\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i_k\\ \\ \\ \\ \end{array}}_{\text{כפל מטריצה בוקטור} =} = \begin{bmatrix}0\\ \\ \vdots\\ \\ 0\end{bmatrix}$$

צירוף עמודות המטריצה עם מקדמי הווקטור

אבל $i_1, \dots, i_k$ הן המשתנים התלויים, לכן:

$$C_{i_1}(CF(A)) = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, C_{i_k}(CF(A)) = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \leftarrow k$$

לפיכך נקבל:

$$0 = \alpha_1 C_{i_1}(CF(A)) + \dots + \alpha_k C_{i_k}(CF(A)) =$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_k\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

כלומר הצ"ל שהתחלנו ממנו היה טריוויאלי, כלומר:

$B = \{C_{i_1}(A), \dots, C_{i_k}(A)\}$ בת"ל.

העמודות המתאימות של המשתנים התלויים של $\underline{\underline{A}}$!

צ"ל $\underline{B = \{C_{i_1}(A), \dots, C_{i_k}(A)\}}$ פורשת את $\underline{C(A)}$:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{C_{i_1}(A), \dots, C_{i_k}(A)\} \overset{?}{=} C(A)$$

$(\subseteq)$ כי הרי: $C(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\underbrace{\{C_1(A), \dots, C_n(A)\}}$.

המובילה ל- $C_{i_1}(A),\dots,C_{i_k}(A)$.

(2) נראה שכל עמודה ניתן להציג כצ"ל של B.

נסתכל ב- $C_j(A)$. אם x_j משתנה תלוי $\Leftarrow$ $j=i_p$ לאיזשהו p ולכן ברור כי $C_j(A)\in B$.

נניח x_j משתנה חופשי.

ניזכר כי ניתן לקבוע את המשתנים החופשיים כרצוננו, ובהינתן זה לקבל פתרון יחיד למע' ההומ' במשתנים התלויים.

נקבע $x_j=-1$ וכן $x_\ell=0$ לכל משתנה חופשי $\ell\neq j$.

נקבל פתרון המתקבל למע' ההומ':

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$\alpha_j=-1$

$\alpha_\ell=0 \quad \forall$ משתנה חופשי $\ell\neq j$

לפי כפל מט' בווקטור:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i(A)=0$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{-1\cdot C_j(A)}_{\substack{\text{המשתנה החופשי}\\ \text{המת׳ שאינו אפס:}\\ x_j}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{k} \alpha_{i_p} C_{i_p}(A)}_{\text{המשתנים התלויים}} = 0$$

נעביר אגף:

$$C_j(A) = \sum_{p=1}^{k} \alpha_{i_p} C_{i_p}(A)$$

ובפרט,

$$C_j(A) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}} B$$

כי נכון לכל j משתנה חופשי, ולכן:

$C(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}} B$ כנדרש.

B פורשת + בת״ל ⟸ בסיס.

מ.ש.ל. ②.

מסקנה:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{F}} R(A) = \dim_{\mathbb{F}} C(A)} \quad ①$$

הוכחה: ראינו כי השורות בצורה המדורגת שאינן שורות אפסים מהוות בסיס ל- $R(A)$.

מספרן = מספר האיברים המובילים בצורה המדורגת.

זהו גם בדיוק מספר המשתנים התלויים, שבפ׳ שווה ל,

והוא גם הבסיס של $C(A)$.

מ.ש.ל.

הגדרה - <u>דרגה</u>: $\underline{\operatorname{rank}(A)} := \dim R(A) = \dim C(A)$

$$\boxed{\dim_{\mathbb{F}} N(A) = m - \operatorname{rank}(A)}$$ ②

מס' המשתנים החופשיים ↑ (ל-$\dim_{\mathbb{F}} N(A)$)

מס' המשתנים הכולל ↑ (ל-m)

מס' המשתנים התלויים ↑ (ל-$\operatorname{rank}(A)$)

הוכחה:

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>: מצאו בסיסים למרחבי המט' A וחשבו $\operatorname{rank}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3)$

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}\right\}$$

הערה: נניח, ב- a_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ואז: $R(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{(1\ 2\ 0\ 1), (0\ 0\ 1\ 2)\}$

נמשיך את התרגיל ב- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$C(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{rank}(A) = \dim_{\mathbb{F}} R(A) = \dim_{\mathbb{F}} C(A) = 2$$

$$\left(\dim_{\mathbb{F}} N(A) = m - \mathrm{rank}(A) = 4 - 2 = 2\right)$$

$$x_3 = t,\ x_4 = s \Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{3}s$$

$$x_1 = -\tfrac{2}{3}t - \tfrac{1}{3}s$$

$$t\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$ כאן הכל.

2807-8-2

הערות על מרחבי המטריצה:

$$R(AB) \subseteq R(B) \qquad ①$$

$$C(AB) \subseteq C(A) \qquad ②$$

$A \in \mathbb{F}^{n\times m}$
$B \in \mathbb{F}^{m\times k}$

הוכחה: ①

$$R_i(AB) \underset{\text{כפל שורה שורה}}{=} R_i(A)\cdot B \underset{\text{כפל שורה במטריצה}}{=} \sum_{j=1}^{m} \overset{A_{ij} \,=\, \text{סקלר}}{R_i(A)_j} \cdot R_j(B) \in$$

$$\left(R_i(A) = [\quad \overset{j}{\cdot} \quad] \right) \qquad R_i(A)_j$$

$$\in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1(B),\dots,R_m(B)\} = R(B)$$

הסבר: $R_1(AB),\dots,R_n(AB) \in R(B)$

ולכן: $\Rightarrow R(AB) \subseteq R(B)$

מ.ש.ל.

② הוכחה ראשונה: שחלוף + טענה ①.

הוכחה דומה שנית:

$$C_j(AB) = A\cdot C_j(B) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(C_j(B))_i}_{B_{ij}} \cdot C_i(A) \in$$

-y

$$\in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{C_1(A),\dots,C_m(A)\} = C(A)$$

הלכן:

$$C_1(AB),\dots,C_m(AB) \in C(A)$$

ולכן:

$$C(AB) \subseteq C(A).$$

מ.ש.ל.

מסקנה:

① $$\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}.$$

הוכחה:

$$\mathrm{rank}(AB) = \dim_{\mathbb{F}} C(AB) \leq \dim_{\mathbb{F}} C(A) = \mathrm{rank}(A)$$

$$\mathrm{rank}(AB) = \dim_{\mathbb{F}} R(AB) \leq \dim_{\mathbb{F}} R(B) = \mathrm{rank}(B).$$

מ.ש.ל.

לא תמיד יש שוויון:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 1$$

$$\mathrm{rank}(AB) = 0$$

$$B \in \mathbb{F}^{n\times m} \qquad A \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

② A

② אם A הפיכה אזי:

$$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B)$$

<u>הוכחה:</u> $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$ מהטענה הקודמת.

$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A^{-1}AB) \leq \mathrm{rank}(AB)$ כנ"ל.

מ.ש.ל.

---

③ $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. $(A,B \in \mathbb{F}^{n\times m})$

<u>הוכחה:</u> $\mathrm{rank}(A+B) = \dim_{\mathbb{F}} C(A+B)$

$C_i(A+B) = C_i(A) + C_i(B) \quad \forall\, 1 \leq i \leq m$

$$\Rightarrow C(A+B) \subseteq C(A) + C(B)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\dim_{\mathbb{F}} C(A+B) \leq \dim_{\mathbb{F}}\big(C(A)+C(B)\big) \leq$$

$$\leq \dim_{\mathbb{F}} C(A) + \dim_{\mathbb{F}} C(B)$$

לכן: $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

מ.ש.ל.

<u>תרגיל:</u> קיימת מט' $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. כך ש $A^2=0$.

האם יתכן $\mathrm{rank}(A)=n$?

$$\underbrace{\cdots}_{\text{אמ״מ הפיכה.}}$$

אבל אם $A^2=0 \Leftarrow I = A^{-2}A^2 = 0$ סתירה.

$$\left(\begin{array}{l} AB = BA = I \\ A^2B^2 = B^2A^2 = I^2 = I \end{array}\right)$$