פתרון תרגיל בית 5 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ה

שאלות המסומנות עם $(-)$ הן יותר קלות, ושאלות המסומנות עם $(+)$ הן יותר קשות.

שאלה 1. תזכורת לסדרת פיבונצ'י: ערכי ההתחלה הם $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה היא $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 2$. הוכיחו בעזרת אינדוקציה שלכל מספר טבעי n, האיבר F_{3n} בסדרת פיבונצ'י הוא זוגי.

פתרון. עבור $n = 1$, מתקיים כי $F_3 = 2$ מספר זוגי. נניח נכונות עבור $n - 1 \geq 0$, ונוכיח נכונות n. נשים לב כי

$$F_{3n} = F_{3n-1} + F_{3n-2} = F_{3(n-1)} + 2F_{3n-2}$$

לפי הנחת האינדוקציה $F_{3(n-1)}$ הוא זוגי, ברור כי $2F_{3n-2}$ זוגי, ולכן גם סכומם זוגי.

שאלה 2. מהו מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 44$ כאשר x_i מספרים שלמים זוגיים אי-שליליים?

פתרון. נשתמש במספר הדרכים לחלק k כדורים זהים לתוך n תאים. זו בחירה עם חזרה וללא חשיבות לסדר, כלומר $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות. אפשר לחלק את המשוואה מן השאלה ב-2, ולהגדיר משתנים חדשים $y_i = x_i/2$ שאנו יודעים שהם שלמים:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 22$$

לכן יש $\binom{22+4-1}{3} = \binom{25}{3}$ אפשרויות.

שאלה 3. מהו מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 44$ כאשר x_i מספרים שלמים אי זוגיים חיוביים?

פתרון. שאלה זו דומה לשאלה הקודמת, אך כאן אנו דורשים שבפתרונות למשוואה, יתקיים $x_i \geq 1$ לכל i. נוכל להפחית 1 מכל משתנה, ולהפוך אותו לזוגי אי-שלילי. בסך הכל הפחתנו 4 משני אגפי המשוואה. נגדיר משתנים חדשים $y_i = \frac{x_i - 1}{2}$ שאנו יודעים שהם שלמים. לכן יש $\binom{20+4-1}{3} = \binom{23}{3}$ אפשרויות.

שאלה 4. מצאו את מספר הסדרות $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ של מספרים שלמים המקיימות

$$50 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{10} \geq 0$$

מה יהיה מספר הסדרות אם בנוסף נדרוש כי a_i הם מספרים שלמים זוגיים?

פתרון. השאלה שקולה למציאת מספר הפתרונות לאי-השיוויון במספרים שלמים אי-שליליים

$$y + x_1 + x_2 + \cdots + x_9 + z = 50$$

כאשר $y = 50 - a_1$, $x_i = a_i - a_{i+1}$ עבור $1 \le i \le 9$ וכן $z = a_{10} - 0$ (המשתנים הם ההפרשים בסדרה a_i). כלומר יש $\binom{50+10}{10}$ סדרות כאלו.

עבור המקרה של מספרים זוגיים, פשוט נחלק את איברי הסדרה ב-2 ובאופן דומה נקבל כי יש $\binom{25+10}{10}$ סדרות כאלו.

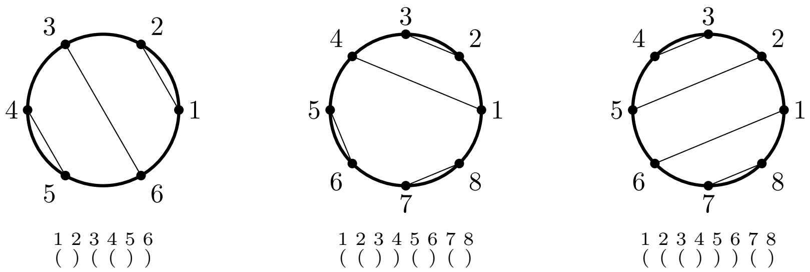
שאלה 5. נתונות $2n$ נקודות שונות על היקף מעגל. הוכיחו כי מספר קטלן C_n שווה למספר הדרכים לחלק את הנקודות ל-n זוגות כך שהמיתרים המחברים את הנקודות בכל זוג לא נחתכים.

נסו להוכיח זאת בשתי דרכים: על ידי מציאת נוסחת נסיגה ועל ידי מציאת התאמה חח"ע ועל למחרוזות מאוזנות של סוגריים.

פתרון. נמספר את הנקודות ב-$1, \ldots, 2n$ לאורך המעגל.

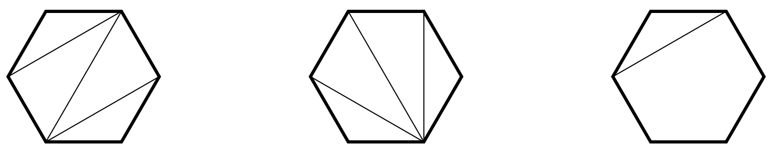
עבור נוסחת הנסיגה נשים לב כי נקודה מספר 1 חייבת להתחבר לנקודה בעלת מספר זוגי $2k$ עבור $1 \le k \le n$. נסמן את מספר הדרכים לחיבור הנקודות ב-T_n. כעת, לאחר חיבור הנקודה 1 לנקודה $2k$, ניתן לראות כי T_n מקיימת את נוסחת הנסיגה $T_n = \sum_{k=1}^{n} T_{k-1}T_{n-k}$ שיחד עם תנאי ההתחלה $T_0 = 1$ זו נוסחת נסיגה למספרי קטלן.

ההתאמה החח"ע ועל למחרוזות מאוזנות של סוגריים, שידוע לנו שמספרן C_n, תתאים עבור חיבור מסוים של נקודות את האותיות במחרוזת לפי המיתרים. למיתר (i, j) עבור $i < j$ היא תשים במיקום i סוגר שמאלי ובמיקום j סוגר ימני. ניתן להבחין שאם נראה את המיתר (i, j) כחץ מהנקודה הקטנה לנקודה הגדולה, אז מצדו הימני של החץ נקבל תת־מחרוזת מאוזנת מאורך $j - i - 1$ שמוכלת בין הסוגריים של המיתר. כדי להשלים את ההוכחה יש להראות שאכן מקבלים כך את כל המחרוזות המאוזנות של סוגריים, ולא אף מחרוזת לא מאוזנת. דוגמאות להתאמה:



כדי להבין את ההתאמה יותר טוב, נסו לצייר את ההתאמה עבור כל חמשת המחרוזות המאוזנות של סוגריים מאורך 6, שהרי $C_3 = 5$.

שאלה 6. יהי מצולע P בן n צלעות. אלכסון של מצולע P הוא קו המחבר שני קודקודים של P ונמצא בחלקו הפנימי. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של P. שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמה, אם P הוא משושה משוכלל:



במשושה בצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, במשושה במרכז מסומן שילוש ובמשושה בצד שמאל מסומן שילוש אחר.

1. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן $n \geq 3$ צלעות ניתן לשילוש ושיש בשילוש $n-3$ אלכסונים. מותר להניח שכל אלכסון במצולע נמצא בחלקו הפנימי של המצולע. (ניתן להוכיח גם שכל מצולע ניתן לשילוש).

2. $(+)$ יהי T_n מספר השילושים של מצולע משוכלל בן n צלעות. מצאו נוסחת נסיגה עבור T_n וממנה הסיקו נוסחה מפורשת עבור T_n.

פתרון. 1. נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n=3$, ברור שהטענה נכונה וניתן לשלש משולש בעזרת $n-3=0$ אלכסונים. הרי המצולע הוא כבר משולש. יהי $n>3$ ונניח את נכונות הטענה לכל $3 \leq k < n$. נמתח אלכסון כלשהו בין שני קודקודים במצולע (ודאי ניתן לעשות כך, כי המצולע הוא משוכלל, וכל אלכסון בין שני קודקודים נמצא בחלקו הפנימי). האלכסון מחלק את המצולע לשני תת־מצולעים קמורים, שאם לאחד מהם $k \geq 3$ צלעות, אז לשני יש $n-k+2$ צלעות. ניתן להבין זאת בכך שהאלכסון שמתחנו משמש כצלע נוספת של שני תת־המצולעים.

שימו לב כי $n>k$ וכן $n > n-k+2 \geq 3$. לפי הנחת האינדוקציה את תת־המצולע הראשון ניתן לשלש בעזרת $k-3$ אלכסונים, ואת תת־המצולע השני ניתן לשלש בעזרת $n-k-1$ אלכסונים. יחד עם האלכסון הראשון שמתחנו, נקבל כי את המצולע ניתן לשלש עם $(k-3)+(n-k-1)+1=n-3$ אלכסונים. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n \geq 3$.

2. עבור $n=3$, יש רק את "השילוש הריק", ולכן $T_3=1$. בקלות ניתן לשים לב גם כי $T_4=2$.

נסמן את קודקודי המצולע ב-$v_1, v_2, \ldots, v_n$ בכיוון השעון. נתמקד בצלע v_1v_n בשילוש כלשהו. ישנן $n-2$ אפשרויות לקודקוד שלישי במשולש אליו שייכת הצלע: $v_2, \ldots, v_{n-1}$. באופן דומה לסעיף הקודם, חילקנו את המצולע לשני תת־מצולעים בתוספת המשולש $\Delta v_1v_nv_k$. אם באחד מתת־המצולעים יש k קודקודים, אז בשני יש $n-k+1$ קודקודים. נוסחת נסיגה למספר האפשרויות לשילושים כאלו היא $\sum_{k=2}^{n-1} T_kT_{n-k+1}$ כאשר $T_2=1$.

שינוי לאינדקס בנוסחת הנסיגה יגלה כי מדובר בנוסחת נסיגה עבור מספר קטלן $C_{n-2}=\sum_{i=1}^{n-2} T_{i+1}T_{n-i}$. נוסחה מפורשת עבור T_n תהיה

$$T_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}$$

שאלה 7 (שאלת אתגר הטוטו). $(+)$ כל שבוע מתפרסמת רשימה של משחקי כדורגל אשר משתתפים בטופס הטוטו בשבוע הזה. המשתתפים בטוטו צריכים לנחש את תוצאת המשחקים. לא לדאוג, מדובר בשאלות מתמטיות ואין שום צורך בידע בכדורגל כדי לפתור אותן.

בטופס סטנדרטי יש 16 שורות עבור 16 משחקי כדורגל. במילוי הטופס יש למלא בכל שורה אחת משלוש אפשרויות: 1 (ניצחון קבוצת הבית), X (תיקו) או 2 (ניצחון קבוצת החוץ). הפרס הראשון מוענק למי שניחש נכונה את תוצאות כל המשחקים. פרס משנה מוענק למי שניחש נכונה 12-15 תוצאות נכונות.

המטרה העיקרית שלכם היא למצוא חסמים טובים למספר הטפסים שיש למלא כדי להבטיח זכיה כלשהי (פרס ראשון או פרס משנה). נתחיל בכמה סעיפים יותר קלים, ואחר כך יותר קשים. לעיתים נשתמש בטפסים לא סטנדרטיים שבהם יש פחות משחקים.

1. מהו המספר הקטן ביותר של טפסים סטנדרטיים שצריך למלא כדי להבטיח לפחות תוצאה אחת נכונה?

2. מהו המספר הקטן ביותר של טפסים סטנדרטיים שצריך למלא כדי להבטיח זכייה בפרס הראשון?

3. מצאו חסם תחתון למספר הטפסים עם שלוש שורות שיבטיח לפחות 2 תוצאות נכונות. רמז: מספר חד־ספרתי לא גדול.

4. מצאו חסם תחתון למספר הטפסים עם ארבע שורות שיבטיח לפחות 3 תוצאות נכונות.

5. העזרו בסעיף הקודם כדי למצוא חסם תחתון למספר הטפסים שיבטיח זכיה בפרס כלשהו בטופס סטנדרטי. כלומר מצאו מספר N של טפסים שאם נקנה פחות ממנו יתכן ובאף אחד מן הטפסים לא תהינה 12 (או יותר) תוצאות נכונות. רמז: נסו לחשוב מה קורה אם התוצאות שניחשנו בטופס אחד "מאוד שונות" מהתוצאות שניחשנו בטופס אחר.

6. מצאו חסם עליון למספר הטפסים עם שלוש שורות שיבטיח לפחות 2 תוצאות נכונות. רמז: מספר חד־ספרתי לא גדול.

7. מצאו חסם עליון למספר הטפסים עם ארבע שורות שיבטיח לפחות 3 תוצאות נכונות.

8. העזרו בסעיף הקודם כדי למצוא חסם עליון למספר הטפסים שיבטיח זכיה בפרס כלשהו בטופס סטנדרטי. כלומר מצאו מספר N של טפסים כך שמובטח שבאחד מן הטפסים יש 12 או יותר תוצאות נכונות.

בהצלחה!