

תרגיל בית 7 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תהי E/\mathbb{Q} הרחבת גלואה כך ש- $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_n$. הוכיחו כי יש ל- E תת-שדה K כך ש- $[K:\mathbb{Q}] = 2$.

שאלה 2. חשבו את חבורות גלואה הבאות ואת סריג תת-החבורות שלהן. מצאו גם את סריג תת-השדות של ההרחבות המתאימות.

א. $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$

ב. $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 7$.

ג. $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^7 - 1$.

שאלה 3. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות. אם לא, מצאו את הסגור הנורמלי שלהן.

א. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$

ב. $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$ כאשר ρ הוא שורש יחידה מסדר 7. רמז: זה קל לפי שאלה 2.

ג. $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^3)$

שאלה 4. נסמן שורש יחידה $\rho = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ מסדר 3. חשבו את הפולינום המינימלי מעל \mathbb{Q} של $2\rho + \sqrt[3]{49}$. רמז: העזרו בשאלה 2 ובפעולה של חבורת גלואה המתאימה.

בהצלחה!