



קבלת החלטות במשחקים עם מזל

דר ארז שיינר

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





המשטרה עצרה שני חשודים בפשע ומפרידה אותם לחדרי חקירה שונים, ומציעה להם להודות בפשע ולהפוך לעדי מדינה.

- אם שניהם מודים, הם מקבלים 5 שנים בכלא כל אחד
- אם האחד מודה והשני לא, עד המדינה יוצא לחופשי והשני מקבל 15 שנים בכלא.
- אם שניהם אינם מודים, הם יקבלו שנה 1 בכלא כל אחד.



המשטרה עצרה שני חשודים בפשע ומפרידה אותם לחדרי חקירה שונים, ומציעה להם להודות בפשע ולהפוך לעדי מדינה.

- אם שניהם מודים, הם מקבלים 5 שנים בכלא כל אחד
- אם האחד מודה והשני לא, עד המדינה יוצא לחופשי והשני מקבל 15 שנים בכלא.
- אם שניהם אינם מודים, הם יקבלו שנה 1 בכלא כל אחד.

מה הם צריכים לעשות?
האם זה משנה אם הם הספיקו לדבר קודם בתא המעצר?

דילמת האסיר

נציג את ה"משחק" בטבלה:

חשודה II	מודה	לא מודה
חשוד I		
מודה	-5,-5	0,-15
לא מודה	-15,0	-1,-1



נביט בהגרלה של 1010 שקלים, עם עלות השתתפות של 10 שקלים.

מכונת הימורים	זכייה	הפסד
שחקנית		
משחקת	1000	-10
לא משחקת	0	0



כעת נניח כי ההסתברות לזכייה היא אחוז בודד

מכונת הימורים	1%	99%
שחקנית		
משחקת	1000	-10
לא משחקת	0	0



אם היא תבחר לשחק, בסיכוי של אחד למאה היא תרוויח 1000 שקלים,
 ובסיכוי של 99 למאה היא תפסיד 10.
 לכן בממוצע היא תרוויח:

$$0.01 * 1000 + 0.99 * (-10) = 0.1$$

מכונת הימורים	1%	99%
שחקנית		
משחקת	1000	-10
לא משחקת	0	0





כעת נביט בהגרלה הבאה במיליונים.
הייתם משתתפים?

מכונת הימורים	1%	99%
שחקנית	-1M	10M
משחקת	0	0
לא משחקת	0	0





אם תשתתף, השחקנית תקבל בממוצע:

$$\frac{1}{100} \cdot (-1) + \frac{99}{100} \cdot 10 = 9.89M$$

מכונת הימורים	1%	99%
שחקנית		
משחקת	-1M	10M
לא משחקת	0	0





אם תשתתף, השחקנית תקבל בממוצע:

$$\frac{1}{100} \cdot (-1) + \frac{99}{100} \cdot 10 = 9.89M$$

אם לא תשתתף, תבטיח שלא תקבל פחות מאפס.

מכונת הימורים	1%	99%
שחקנית		
משחקת	-1M	10M
לא משחקת	0	0





כעת נביט במשחק זוג או פרט.
מה כדאי לעשות במשחק?

שחקן זוג	זוגי	אי זוגי
שחקנית פרט	-1	1
זוגי	1	-1





בניח ששחקן הזוג שולף זוג אצבעות בסיכוי p אחרת הוא שולף אצבע אחת.

שחקן זוג	p	$1-p$
שחקנית פרט	-1	1
זוגי	1	-1





אם שחקנית אחת תשלוף שתי אצבעות היא תקבל בממוצע

$$p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 1 = 1 - 2p$$

ואילו אם תשלוף אצבע אחת היא תקבל בממוצע

$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1$$

שחקן זוג	p	1-p
שחקנית פרט	-1	1
זוגי	1	-1



כלומר אם שחקן הזוג יגריל בהסתברות שווה של חצי, הוא יהפוך את הבחירה של שחקנית הפרט לחסרת משמעות.



שחקן זוג	p	1-p
שחקנית פרט	-1	1
זוגי	1	-1





המגיש במשחק טניס בוחר האם להגיש לימין או לשמאל המגרש.

מהירות הכדור בחבטה הממוצעת גדולה, ולא מותרת זמן רב לתגובה.
(למשל פדרד מגיש בממוצע במהירות של מעל 200 קמ"ש.)

השחקנית העונה בוחרת אם להתכונן לחבטה לצד ימין או לצד שמאל.

חלק זה מבוסס על המאמר הבא:

Walker, Mark, and John Wooders. "Minimax play at Wimbledon."
American Economic Review 91.5 (2001): 1521-1538.

נתאר את הסיכויים לניצחון המגיש בנקודה בטבלה הבאה:

עונה	שמאל	ימין
מגיש		
שמאל	0.58	0.79
ימין	0.73	0.49





נחשב את הסיכוי שהמגיש ירוויח את הנקודה, בהנחה שהעונה מתכוננת לשמאל בהסתברות p .

עונה	p	$1-p$
מגיש		
שמאל	0.58	0.79
ימין	0.73	0.49



נחשב את הסיכוי שהמגיש ירוויח את הנקודה, בהנחה שהעונה מתכוננת לשמאל בהסתברות p .

עונה	p	$1-p$
מגיש		
שמאל	0.58	0.79
ימין	0.73	0.49

אם יחבוט לכיוון שמאל סיכוי המגיש להרוויח את הנקודה הוא:

$$p \cdot 0.58 + (1 - p) \cdot 0.79 = 0.79 - 0.21p$$

אם יחבוט לימין הסיכוי הוא:

$$p \cdot 0.73 + (1 - p) \cdot 0.49 = 0.49 + 0.24p$$



אם העונה תבחר בהסתברות המעניקה למגיש יתרון ברור לאחד הצדדים, נקבל משחק שאינו יציב.



אם העונה תבחר בהסתברות המעניקה למגיש יתרון ברור לאחד הצדדים, נקבל משחק שאינו יציב.

הרי אם המגיש תמיד יבחר באותו צד, העונה תעדיף להתכונן לצד הזה בהסתברות 1.



אם העונה תבחר בהסתברות המעניקה למגיש יתרון ברור לאחד הצדדים, נקבל משחק שאינו יציב.

הרי אם המגיש תמיד יבחר באותו צד, העונה תעדיף להתכונן לצד הזה בהסתברות 1.

במצב כזה, המגיש יעדיף את הצד השני, וחוזר חלילה.

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עברה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.



לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עברה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עברה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עברה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

במצב זה, ללא תלות בבחירת הכיוון של המגיש, הוא ירוויח את הנקודה בסיכוי 0.65

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עברה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

במצב זה, ללא תלות בבחירת הכיוון של המגיש, הוא ירוויח את הנקודה בסיכוי 0.65

ניתן לחשב באופן דומה, שאם המגיש יגיש לשמאל בסיכוי 0.53 לא תהיה משמעות לבחירת העונה.

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עברה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

במצב זה, ללא תלות בבחירת הכיוון של המגיש, הוא ירוויח את הנקודה בסיכוי 0.65

ניתן לחשב באופן דומה, שאם המגיש יגיש לשמאל בסיכוי 0.53 לא תהיה משמעות לבחירת העונה.

המצב בו שני השחקנים יבחרו בהסתברויות אלה נקרא שיווי משקל נאש, מצב בו אף שחקן לא ירוויח מהחלפת אסטרטגיה אם האחר לא יחליף.



בעיטת פנדל כל כך מהירה, שהשוער צריך להחליט לאן לקפוץ לפני הבעיטה.

השוער יכול לקפוץ ימינה, שמאלה או להשאר באמצע.

הבועט יכול לבעוט ימינה, שמאלה או לכיוון האמצע.

לכל שילוב אסטרטגיות יש סיכוי מסויים להבקעת שער, נציג זאת בטבלה.

בדוגמא זו נעזרתי בנתונים מהמאמר

Chiappori, P-A., Steven Levitt, and Timothy Groseclose. "Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer." *American Economic Review* 92.4 (2002): 1138-1151.





בכל שילוב אסטרטגיות בטבלה רשום הסיכוי להבקעה באחוזים

שוער	שמאל	מרכז	ימין
שוער	0.6	0.8	0.9
שמאל	1	0	1
מרכז	0.95	0.8	0.45
ימין			





בהנחה שהשוער יקפוץ שמאלה בסיכוי p ולמרכז בסיכוי q נחשב את סיכוי הבעט להבקיע, עבור כל אחת מבחירותיו.

שוער	בועט	$0.6p+q+0.95(1-p-q)$	$0.8p+0.8(1-p-q)$	$0.9p+q+0.45(1-p-q)$
p		0.6	0.8	0.9
q		1	0	1
$1-p-q$		0.95	0.8	0.45



נחפש נקודת שיווי משקל בה סיכויי ההבקעה זהים לכל החלטה של הבועט.





נחפש נקודת שיווי משקל בה סיכויי ההבקעה זהים לכל החלטה של הבועט.

אנו רוצים למצוא פתרון למערכת המשוואות

$$0.6p + q + 0.95(1 - p - q) = 0.8p + 0.8(1 - p - q)$$

$$0.8p + 0.8(1 - p - q) = 0.9p + q + 0.45(1 - p - q)$$

הפתרון הוא

$$p = 0.58, q = 0.06$$





כלומר בנקודת שיווי המשקל, השוער-

- קופץ לשמאל בהסתברות 0.58
- נשאר במרכז בהסתברות 0.06
- קופץ לימין בהסתברות 0.35





כלומר בנקודת שיווי המשקל, השוער-

- קופץ לשמאל בהסתברות 0.58
- נשאר במרכז בהסתברות 0.06
- קופץ לימין בהסתברות 0.35

במצב זה בסיכוי 74.9% יובקע שער, ללא קשר להחלטת הבועט.





כלומר בנקודת שיווי המשקל, השוער-

- קופץ לשמאל בהסתברות 0.58
- נשאר במרכז בהסתברות 0.06
- קופץ לימין בהסתברות 0.35

במצב זה בסיכוי 74.9% יובקע שער, ללא קשר להחלטת הבוועט.

באופן דומה ניתן לחשב שבנקודת שיווי המשקל, הבוועט-

- בועט לכיוון שמאל בהסתברות 0.42
- בועט למרכז בהסתברות 0.25
- בועט ימינה בהסתברות 0.33





מתוך 459 בעיטות פנדל בליגה הצרפתית ובליגה האיטלקית, עבור השוער-

- אחוז הקפיצות לשמאל 56%
- אחוז ההשאריות במרכז 2%
- אחוז הקפיצות לימין 41%

כמו כן 74.9% מהבעיטות הסתיימו בהבקעת שער.

עבור הבועט-

- אחוז הבעיטות לשמאל 44%
- אחוז הבעיטות למרכז 17%
- אחוז הבעיטות לימין 38%



דו שיח

תודה רבה על ההקשבה!

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

