מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 3

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. הוכח או הפרך: תהיינה A, B קבוצות, אזי:
   א. $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$
   ב. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

פתרון:

א. הפרכה. ניקח $A = \{1\}, B = \varnothing$.
ב. הפרכה. ניקח $A = \{1\}, B = \{2\}$.

2. הוכח או הפרך:
   א. $A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$
   ב. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

פתרון:

א. הוכחה: $(a,b) \in A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) \leftrightarrow a \in A \wedge b \in \bigcap_{i \in I} B_i \leftrightarrow a \in A \wedge (\forall i : b \in B_i) \leftrightarrow$

$\forall i : (a \in A \wedge b \in B_i) \leftrightarrow \forall i : ((a,b) \in A \times B_i) \leftrightarrow (a,b) \in \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$

ב. הפרכה. ניקח $A = B = C = \{1\}$. ואז $((1,1),1) \in (A \times B) \times C, ((1,1),1) \notin A \times (B \times C)$.

3. תהי קב' A, נסמן $\{B_i\}_{i \in I}$, כאשר $I := P(A)$ ו $B_i := i$ (אוסף כל תת הקבוצות של A).
   מצאו:
   א. $\bigcap_{i \in I} B_i$ ו $\bigcup_{i \in I} B_i$.
   ב. $\bigcup_{j \in I} \bigcap_{i \in I} (B_i \cup B_j)$.
   ג. $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in I} (B_i \cap B_j)$.

פתרון:

א. $\bigcap_{i \in I} B_i = \varnothing$ שכן $B_\varnothing = \varnothing$. $\bigcup_{i \in I} B_i = A$ שכן $B_A = A$ וכל שאר האיברים מוכלים ב A.

ב. $\bigcup_{j \in I} \bigcap_{i \in I} (B_i \cup B_j) = \bigcup_{j \in I} ((\bigcap_{i \in I} B_i) \cup B_j) = (\bigcap_{i \in I} B_i) \cup (\bigcup_{j \in I} B_j) = \varnothing \cup A = A$

ג. $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in I} (B_i \cap B_j) = \bigcap_{i \in I} (B_i \cap (\bigcup_{j \in I} B_j)) = (\bigcap_{i \in I} B_i) \cap (\bigcup_{j \in I} B_j) = \varnothing \cap A = \varnothing$

4. בכל סעיף הוכיחו לגבי היחס R על הקבוצה הנתונה A האם הוא: רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי או טרנזיטיבי.

א. $A:=\mathbb{Z}$, $R:=\{(x,y)\in A\times A: 3|(x+2y)\}$ (כאן | הוא היחס מחלק את, כלומר היחס שמקבל ערך אמת אם המספר משמאל מחלק את זה שמימין).

ב. $A:=P(\mathbb{N})$, $R:=\{(x,y)\in A\times A: x\subseteq y\}$

ג. $A:=\mathbb{Q}$, $R:=\{(x,y)\in A\times A: (x<y)\vee(y<x)\}$

פתרון:

א. נשים לב כי $3|(x+2y)\leftrightarrow 3|(x-y)$, לכן היחס הוא יחס מודולו 3, שאפשר (וצריך) להוכיח כמו שהוכחנו בהרצאה שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

ב. זהו יחס ההכלה על קבוצות, שהוכחנו שהוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

ג. היחס בבירור אנטי רפלקסיבי, וסימטרי כי ההגדרה סימטרית. כמו כן היחס אינו טרנזיטיבי שכן $(1,2),(2,1)\in R$ אבל $(1,1)\notin R$.

5. $\mathbb{Z}^*:=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ באופן הבא:

$$R:=\{((z_1,n_1),(z_2,n_2))\in\left(\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\right)\times\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\right)\right)| n_2z_1=n_1z_2\}$$

הוכיחו כי R הינו יחס שקילות (כלומר הוכיחו רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות).

בונוס: מה הקשר בין היחס R לקבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$?

פתרון: רפלקסיביות- יהי $(z_1,n_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, מתקיים $n_1z_1=n_1z_1$ ולכן $((z_1,n_1),(z_1,n_1))\in R$.

סימטריות- נניח $((z_1,n_1),(z_2,n_2))\in R$, אזי $n_2z_1=n_1z_2$ ולכן $n_1z_2=n_2z_1$ כלומר $((z_2,n_2),(z_1,n_1))\in R$.

טרנזיטיביות- נניח $((z_1,n_1),(z_2,n_2)),((z_2,n_2),(z_3,n_3))\in R$. אזי:

$$n_2z_1=n_1z_2\wedge n_3z_2=n_2z_3$$
$$n_3n_2z_1=n_3n_1z_2\wedge n_3n_1z_2=n_2n_1z_3$$
$$n_3n_2z_1=n_2n_1z_3$$
$$n_3z_1=n_1z_3$$

כלומר $((z_1,n_1),(z_3,n_3))\in R$.

6. (בונוס) תהי סדרת קבוצות $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. נאמר כי קבוצה B היא הגבול של הסדרה $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ אם:

$$a\in B\to\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:a\in A_n)$$
$$a\notin B\to\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:a\notin A_n)$$

במקרה זה נסמן $\lim_{n\to\infty}A_n=B$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל B. אם אין גבול נאמר שהיא מתבדרת.

א. מצאו סדרת קבוצות מתכנסת, וסדרת קבוצות מתבדרת. הוכיחו.

ב. תהי $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}:A_n\subseteq A_{n+1}$. הוכיחו שהסדרה $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת וגבולה הוא $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. כלומר $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

פתרון:

א. מתכנסת:

נגדיר את הסדרה $A_n:=\{k\in\mathbb{N}\mid k<n\}$, הסדרה הזו מתכנסת וגבולה הוא $\mathbb{N}$. נוכיח:

נניח $x\notin\mathbb{N}$, אזי $\forall n\in\mathbb{N}:x\notin A_n$ מהגדרה. מנגד אם $x\in\mathbb{N}$ אזי $\forall n>x:x\in A_n$ לכן ניקח $n_0=x$ ונקבל את הדרוש.

מתבדרת:

נגדיר $B_n=\begin{cases}\{1\} & 2\mid n\\ \{0\} & else\end{cases}$. הסדרה הזו מתבדרת. נוכיח: נניח בשלילה כי B_n מתכנסת לקבוצה B. יש שתי אפשרויות:

1. $1\in B$, ואזי מהגדרת ההתכנסות $\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:1\in B_n)$, ניקח $n=2n_0+1$ ונקבל $1\in B_{2n_0+1}$ בסתירה להגדרת הסדרה.

2. $1\notin B$, ואזי מהגדרת ההתכנסות $\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:a\notin A_n)$, ניקח $n=2n_0$ ונקבל $1\in B_{2n_0}$ בסתירה להגדרת הסדרה.

בשני המקרים הגענו לסתירה ולכן ההנחה שגויה, כלומר הסדרה אינה מתכנסת.

ב. נעיר קודם להוכחה כי מהנתון $\forall n\in\mathbb{N}:A_n\subseteq A_{n+1}$ נובע כי $\forall n,m\in\mathbb{N}:n>m\to A_n\supseteq A_m$. הדבר נכון שכן $A_m\subseteq A_{m+1}\subseteq\ldots\subseteq A_{n-1}\subseteq A_n$.

עתה נוכיח כי גבולה של $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ הוא $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

1) אם $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, אזי $\exists n_0\in\mathbb{N}:x\in A_{n_0}$, אבל מהמונוטוניות מכך נובע $\forall n>n_0:x\in A_n$. כלומר $\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:x\in A_n)$ כנדרש.

2) אם $x\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, אזי $\forall n\in\mathbb{N}:x\notin A_n$. ובפרט אם ניקח $n_0=1$ נקבל $\forall n>n_0:a\notin A_n$, כלומר $\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:a\notin A_n)$.

ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ גבול של הסדרה $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.