תרגיל בית 5

__שאלה 1__

(1) תהי $\mathbb{Q}$ חבורת המספרים הרציונליים (עם פעולת החיבור), ותהי $\mathbb{Z}$ (חבורת המספרים השלמים) תת חבורה שלה.

א. הוכיחו שב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל איבר הוא מסדר סופי.

ב. הראו כי התת חבורה הנוצרת ע"י המחלקות של $\frac{1}{10}$ ו- $\frac{3}{8}$ היא ציקלית.
מהו הסדר של תת חבורה זו, ומהו האינדקס שלה בחבורה הגדולה?

(2) נתבונן ב- $G=GL_2(\mathbb{Q},\cdot)$ ובתת-החבורה $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}: a\in\mathbb{Q}\right\}$. חשבו את $[G:H]$.

__שאלה 2__

א. תהי $H\le G$. הראו ש- $H\cap Z(G)\subseteq Z(H)$, ותנו דוגמא שבה זו הכלה אמיתית.

ב. בכל סעיף תנו דוגמא לחבורה G ולתת חבורה $H\le G$ המדגימה את הדרוש:
1. $Z(H)\subset Z(G)$ (הכלה ממש)
2. $Z(G)\subset Z(H)$
3. $Z(H)$ אינו מוכל ב- $Z(G)$ ואינו מכיל אותו.

__שאלה 3__

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ומצאו גרעין עבור הנכונות שבהן:

א. קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Z},+)\to\mathbb{Z}_{2012}$

ב. קיים איזומורפיזם $D_5\to\mathbb{Z}_{10}$

ג. קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Q},+)\to S_5$

ד. קיים מונומורפיזם $S_3\to GL_3(\mathbb{R})$

__שאלה 4 (ברמה של מבחן)__

א. אם $N\lhd G$ אזי $Z(N)\lhd G$.

ב. מצאו תת חבורה מאינדקס 3 של S_4, והראו שהיא אינה נורמלית.

שאלה 5

א. תנו דוגמא נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A,B \triangleleft G$, ו- $G/A \cong B$ אזי $G/B \cong A$.

ב. נניח $K \triangleleft G$ ו- $G/K \cong \mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת ב- G תת חבורה מאינדקס n.

שאלה 6

תהי G חבורה, $a,b \in G$ כך ש- $ab = ba$ ו- $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1_G$ אזי $o(ab) = lcm(o(a), o(b))$.

שאלה 7

הוכיחו ש $\langle (1\,n), (1\,2\,\ldots\,n-1) \rangle = S_n$.

הערה: ניתן להסתמך על מה שהוכחנו בתרגול, וכן על הטענה (שתראו בהרצאה) ש- S_n נוצרת על ידי החילופים מהצורה $(i\; i+1)$.

שאלת בונוס

תהיינה $A,B,C \triangleleft G$, כך ש $B \subseteq A$. הוכיחו את האיזומורפיזם $BC/(A \cap BC) \cong C/(A \cap C)$.

בהצלחה!