

תרגיל בית 10 – מופשטת 1

שאלה 1

הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 אינה פשוטה.

תזכורת: הוכחתם בכיתה טענה שלפיה מכפלה פנימית של תת-חבורות סילו נורמליות מסדרים זרים היא מכפלה ישרה חיצונית.

בתרגיל הבא תוכיחו את הטענה החלשה יותר, אבל עשו זאת לבד, מבלי להסתמך על מה שכבר עשיתם בהרצאה.

שאלה 2

הוכיחו שאם כל תת חבורות סילו של G הן נורמליות, אז היא מכפלה ישרה (פנימית) שלהן.

הערה: הגדרתם בכתה מתי חבורה היא מכפלה ישרה (פנימית) של שתי ת"ח. ההגדרה לכל מספר סופי: חבורה היא מכפלה ישרה פנימית של כמה תת-חבורות, אם כולן נורמליות, החבורה שווה למכפלה שלהן, וכל אחת מהן נחתכת באופן טריוויאלי עם המכפלה של כל האחרות. ההגדרה הזו מבטיחה שאם G מכפלה ישרה של N_1, \dots, N_t אז היא מכפלה ישרה של המכפלה $N_1 \cdot \dots \cdot N_{t-1}$ ו- N_t .

שאלה 3

- א.** תהא G חבורה עם: 20,52 או 175 איברים. הוכיחו ש- G לא פשוטה.
- ב.** הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.
- ג.** תהא G חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש- G ציקלית.
- ד.** הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.
- ה.** הוכיחו שחבורה מסדר 130 אינה פשוטה, ומצאו חבורה לא אבלית מסדר זה.
- ו.** תהא G חבורה. הוכיחו שלא קיימת תת חבורה p -סילו H כך ש-

$$[G : N_G(H)] = 2$$

- ז. הוכיחו שאין חבורה פשוטה מסדר 150.
 ח. הוכיחו שחבורה מסדר $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ היא ציקלית.

שאלה 4

- א. הוכיחו: תהי K תת חבורת p -סילו של G , ותהי $H \triangleleft G$ כך ש- $|H| \mid p$. אזי
 $H \cap K$ היא תת חבורת p סילו של H .
 ב. תנו דוגמה נגדית במקרה ש- H אינה נורמלית.

שאלה 5

תהי $N \triangleleft G$ ויהי $f: G \rightarrow G/N$ ההומומורפיזם הטבעי. (הכל סופי). הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת p -סילו של G , היא תת חבורת p -סילו של G/N (שימו לב שהתמונה היא PN/N).

שאלה 6 (הוכחתם בכיתה, וכדאי לעשות שוב)

הוכיחו שלכל חבורת סילו H מתקיים $N_G(N_G(H)) = N_G(H)$.

שאלה 7

אם G חבורה פשוטה (ואינה \mathbb{Z}_2), וקיימת לה תת חבורה H מאינדקס n , אזי אפשר לשכן את G ב- A_n .

בהצלחה!