אלגברה לינארית 2 תרגול 3

7 באפריל 2021

1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

נתחיל מדומגא:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ונשים לב:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, נאמר ש־ $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ע"ע של A אם קיים $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ כך ש־ $Av=\lambda v$. במקרה זה v נקרא ו"ע של λ.

נשים לב: עבור $v\neq 0$:

$$Av=\lambda v\iff Av-\lambda v=0\iff (A-\lambda I)v=0$$

כעת, למערכת ההומוגנית $A-\lambda I$ יש פתרון לא טריוויאלי ולכן היא לא הפיכה, ו־

$$|\lambda I-A|=|A-\lambda I|=0$$

מסקנה: כדי למצוא ע"ע נבדוק עבור אילו ערכים של $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=0$ נקרא הפולינום האופייני של A.

תרגילים:

1. מצאו ע"ע ו"ע של

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

פתרון: נתחיל בלמצוא ע"ע:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda-3 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+4 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי שורה ראשונה:

$$= (\lambda+3)\cdot\det \begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -6 & \lambda+4 \end{pmatrix} - (-1)\cdot\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & \lambda+4 \end{pmatrix} + 1\cdot\det \begin{pmatrix} 5 & \lambda-3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda+3)\underbrace{(\lambda^2+\lambda-12+6)}_{(\lambda+3)(\lambda-2)} + \underbrace{5\lambda+20-6-30-6\lambda+18}_{-\lambda+2} =$$

$$= (\lambda-2)\left((\lambda+3)^2-1\right) = (\lambda-2)\left(\lambda^2+6\lambda+8\right) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+4)$$

לפולינום יש שלושה שורשים: $\pm 2, -4$, והם הערכים העצמיים שלו.

כדי לחשב וקטורים עצמיים אנחנו נחשב מרחב עצמי, וניקח לו בסיס. אנחנו מחפשים וקטור $v \neq 0$ המקיים $(\lambda I - A)v = 0$, כלומר מחפשים את מרחב הפתרונות של $\lambda I - A$. נחשב:

עבור ע"ע -2:

$$N\left(\underbrace{-2}_{\lambda} I - A\right) = N\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נבדוק שאכן זה קורה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}}_{Av} = \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\lambda v}$$

עבור ע"ע 2:

$$N(2I - A) = N\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \to \cdots = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור ע"ע -4:

$$N(-4I-A)=N\begin{pmatrix}-1&-1&1\\5&-7&1\\6&-6&0\end{pmatrix}=\cdots=\left\{\begin{pmatrix}t\\t\\2t\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

2. מצאו ע"ע ומרחבים עצמיים של

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$$

נחשב פולינום אופייני:

$$P_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-2&-1\\0&-2&\lambda-3\end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6-2)=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

נחשב מרחב עצמי של ע"ע 1:

$$N(I-A)=N\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}t\\-s\\s\end{pmatrix}:t,s\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הנה דוגמא לכך שישנם מקרים בהם יש $a>1$ וקטורים בת"ל לע"ע.

מרחב עצמי של ע"ע 4:

$$N(4I-A)=N\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&2&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&0&-\frac{3}{2}\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}\\t\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

משפט: ו"ע של ע"ע שונים הינם בת"ל.

2 דמיון מטריצות

מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ייקראו דומות אם יש P הפיכה כך ש־

$$P^{-1}AP = B$$

משפט: דמיון מטריצות זהו יחס שקילות.

תכונות מטריצות דומות:

1. אם A, B דומות אז $|A| = |B|$.
2. למטריצות דומות יש אותם ע"ע.
3. למטריצות דומות יש את אותו פ"א (=פולינום אופייני).
4. למטריצות דומות אותה דרגה.
5. למטריצות דומות יש אתא אותה עקבה ($trace$).

הוכחת 3: נתון שיש P הפיכה כך ש־ $P^{-1}AP = B$. כעת:

$$P_B(\lambda) = |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |\lambda \underbrace{P^{-1}P}_{I} - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$

כעת לפי כפליות הדטרמיננטה נקבל:

$$= |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A| = P_A(\lambda)$$

משפט: מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אמ"ם יש בסיס של $\mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע של A.

תרגילים:

1. בדקו האם $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ לכסינה.

   פתרון: נחשב תחילה ע"ע:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

מרחב עצמי של ע"ע 1:

$$N\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

מרחב עצמי של ע"ע 5:

$$N\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו שיש בסיס ל-$\mathbb{R}^2$ המורכב מו"ע ולכן המטריצה לכסינה. כלומר, היא דומה לאלכסונית, יש P הפיכה כך ש-:

$$P^{-1}AP = D$$

כאשר D אלכסונית עם ע"ע על האלכסון:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ו-P מורכבת מו"ע, בהתאמה למיקומי הע"ע:

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

הסבר: נסמן $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = P^{-1}A\begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} Av & Au \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1\cdot v & 5\cdot u \end{pmatrix} =$$

$$= P^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

2. הוכיחו: A הפיכה אמ"ם 0 איננו ע"ע של A.
פתרון: A הפיכה אמ"ם $|A| \neq 0$ אמ"ם $|0I - A| \neq 0$ אמ"ם 0 איננו ע"ע.

3. האם יש קשר בין הפיכות ללכסינות? כלומר, האם תכונה אחת גוררת את השנייה?
פתרון: לכסינות לא גוררת הפיכות: לדוגמא, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה ולא הפיכה.
הפיכות לא גוררת לכסינות: לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A הפיכה. נבדוק מי הע"ע:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ולכן מעל הממשיים אין ע"ע, ובפרט אין ו"ע, ולכן אין בסיס מו"ע ולכן לא לכסינה.
הערה: שימו לב שמטריצה זו לכסינה מעל המרוכבים (כי יש שני ע"ע $\pm i$, ולכל אחד ו"ע, וביחד הם בת"ל ולכן בסיס של $\mathbb{C}^2$).

4. ע"ע של העתקה לינארית הם ע"ע של איזשהי מטריצה המייצגת את ההעתקה. v ו"ע של T אמ"ם $[v]_B$ הוא ו"ע של $[T]_B$
מצאו ע"ע ו"ע של ההעתקה $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת לפי משפט ההגדרה ע"י הבסיס $B = \{1+x, x, x^2\}$:

$$T(1+x) = -1 + x^2$$

$$t(x) = 1 + x^2$$

$$T(x^2) = 1 + 2x - x^2$$

פתרון: נחשב את

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ומה שכעת צריך לעשות זה למצוא ע"ע וו"ע של $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
נקבל $P_A(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-1)$

$$V_{-2} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן הו"ע של ע"ע -2 הם בעצם: $1 + x - x^2, x - x^2$. ו"ע של ע"ע 1: $1 + 2x + x^2$.