

## מבחן באלגברה לינארית 2

### מועד א' תשפ"א

מרצים: אליהו מצרי ושפרה רייף  
מתרגלות: תמר בר-און, נועה כהן, אמונה ליפסקר ואושרית שטוסל.  
משך המבחן: שעתיים.

**שאלה 1. (א) (19 נקודות)** תהי  $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  מטריצה מרוכבת שכל רכיביה ממשיים. נתון ש

$$\text{rank} A = 3, \quad A^4 = -A^2$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של  $A$ .

**(ב) (15 נקודות)** קבעו אם המטריצה שלהלן לכסינה. נמקו.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**שאלה 2.** יהי  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  מרחב המטריצות הממשיות בגודל  $2 \times 2$  עם המכפלה הפנימית

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$$

תהי  $T : V \rightarrow V$  מוגדרת על ידי  $T(A) = A^t$

**(א) (13 נקודות)** הוכיחו ש  $T$  צמודה לעצמה.

**(ב) (13 נקודות)** יהיו

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

השלימו את  $\{A_1, A_2\}$  לבסיס אורתוגונלי שמלכסן את  $T$ .

**(ג) (7 נקודות)** הוכיחו ש  $T$  אוניטרית.

**שאלה 3. (א) (20 נקודות)** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית  $W_1, W_2$  תתי-מרחבים של  $V$  כך

$$V = W_1 \oplus W_2 \quad \text{ש הוכיחו ש} \quad V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$$

**(ב) (13 נקודות)** הוכיחו/ הפריכו: אם  $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$  אזי  $W_1^0 \cap W_2^0 \neq \{0\}$ .

תזכורת:

$$W_i^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0 \quad \forall w \in W_i\}, \quad i = 1, 2$$