# תרגול 8 – אנליזה מודרנית 1

תזכורת: (משפט פוביני-טונלי): יהיו $\left(X,S,\mu\right)$ ו $\left(Y,G,\nu\right)$ יהיו $\sigma$ - סופיות, ותהי $f$ פונקציה מ $X\times Y$ ל $[0,\infty]$ מדידה $S\times G$ או $f\in L^1\left(X\times Y,S\times G,\mu\times\nu\right)$. אזי

$$\int f d\mu\times d\nu=\iint f\left(x,y\right)d\mu\left(x\right)d\nu\left(y\right)=\iint f\left(x,y\right)d\nu\left(y\right)d\mu\left(x\right).$$

כלומר, ניתן להחליף סדר אינטגרציה.

1. תרגיל ("כשלון חרוץ" של משפטי פוביני וטונלי):

יהיו הממ"חים $\left(\left[0,1\right],L\left(\left[0,1\right]\right),u\right),\left(\left[0,1\right],P\left(\left[0,1\right]\right),v\right)$ כאשר $u=m$ היא מידת לבג ו- $v=\#$ היא מידת הספירה, ותהי $w=u\times v=m\times\#$ מידת המכפלה של $u,v$. נגדיר את האלכסון $D=\left\{\left(x,y\right):0\le x=y\le 1\right\}$.

א. הוכיחו כי האלכסון $D$ הוא מדיד במרחב המכפלה.

ב. הוכיחו כי המספרים $\int_{[0,1]\times[0,1]} I_D\left(x,y\right)dw,\ \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right)dm\left(x\right)d\#\left(y\right),\ \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right)d\#\left(y\right)dm\left(x\right)$ כולם שונים זה מזה.

פתרון:

קודם כל יש להבין מהו מלבן מדיד במרחב המדובר. התשובה היא קבוצה מהצורה $R=E\times F$ כאשר $E\subseteq\left[0,1\right]$ מדידה לבג ו- $F\subseteq\left[0,1\right]$ כלשהי. למשל $R=\left[0,\frac{1}{4}\right]\times\left\{\frac{1}{\pi},\frac{1}{2},\frac{9}{10}\right\}$ הוא מלבן מדיד, ונפחו הוא $\left|R\right|=m\left(\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)\cdot\#\left(\left\{\frac{1}{\pi},\frac{1}{2},\frac{9}{10}\right\}\right)=\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$

א.עבור $\begin{matrix} n=0,1,2,3,\dots \\ k=1,2,3\dots,2^n \end{matrix}$ .נגדיר קטעים $I_{n,k}=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$. נגדיר בנוסף $B_n=\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}\times I_{n,k}$.

לכל $n$, $B_n$ הוא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים ( $R_\sigma$ ), ופשוט לראות כי $D=\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n$ [ניתן לצייר ציור, זה נראה כמו פיקסלים]. כלומר $D$ מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ ולכן מדידה.

ב. כדי לחשב את המידה $w\left(D\right)$ נזכר במידה החיצונית:

$$w^*(D)=\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|R_n| : D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n, R_n \text{ are measurable rectangles}\right\}$$

יהי $\{R_n=E_n\times F_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של $D$ ע"י מלבנים מדידים, ז"א $D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\times F_n$. נזרוק מהאוסף $\{R_n\}$ את כל המלבנים המדידים עבורם $m(E_n)=0$. נותר לנו כיסוי של חלק **לא בן-מניה** של האלכסון, $D'\subseteq\bigcup_{\substack{n=1\\ m(E_n)>0}}^{\infty}E_n\times F_n$. הסיבה לכך היא שקבוצת שיעורי ה-x של המלבנים שהוסרו היא ממידת לבג אפס, ולכן המלבנים שנותרו מכסים תת-קבוצה של האלכסון, ששיעורי ה-x שלה מהווים קבוצה ממידת לבג חיובית (ומכאן לא בת מניה) .

בהכרח ישנו מלבן $R_{n_0}=E_{n_0}\times F_{n_0}$ באוסף הנותר, עבורו $F_{n_0}$ אינסופית (אחרת המלבנים שנותרו לא יכולים לכסות את 'D , שקבוצת שיעורי ה-y שלה אינה בת מניה). עבור אותו המלבן $|R_{n_0}|=m(E_{n_0})\cdot\#(F_{n_0})=\infty$ ומכאן $\sum_{n=1}^{\infty}|R_n|\geq|R_{n_0}|=\infty$ . כלומר, כל האיברים בקבוצה $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|R_n| : D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n, R_n \text{ are measurable rectangles}\right\}$ הם $\infty$ ולכן $w^*(D)$ שהוא ה-sup שלה שווה אינסוף. מכאן ניתן לחשב את האינטגרל הראשון (הכפול):

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} I_D(x,y)\,dw=w(D)=\infty$$

לגבי האינטגרלים הנשנים:

- לכל $y\in[0,1]$ קבוע, $\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,dm(x)=0$ (כי $I_D=0$ כב"מ dm) ולכן $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,dm(x)\,d\#(y)=0$ .
- לכל $x\in[0,1]$ קבוע

$$\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,d\#(y)=\int_{\{x\}} I_D(x,y)\,d\#(y)+\int_{[0,1]\setminus\{x\}} I_D(x,y)\,d\#(y)=\int_{\{x\}}1\cdot d\#(y)+0=\#(\{1\})=1$$

ולכן $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D(x,y)\,d\#(y)\,d\#(x)=\int_{[0,1]}1\cdot dm(x)=1$ .

2. <u>תרגיל:</u> תהי $f:(\mathbb{R},L(\mathbb{R}))\to\mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dm(x)=\int_0^{\infty}m(\{x:|f(x)|\geq t\})\,dm(t)$ .

<u>פתרון:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{|f(x)|}1dm(t)\right]dm(x)=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\ge t\}}dm(t)\right]dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\ge t\}}dm(x)\right]dm(t)=\int_{0}^{\infty}m\left(\left\{x:\left|f(x)\right|\ge t\right\}\right)dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x),dm(t)$ שהן שלמות ו- $\sigma$ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t):|f(x)|\ge t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי ה**קבוצה** $\left\{(x,t):\left|f(x)\right|\ge t\right\}$ מדידה "$L\otimes L$".

(נשתמש בסימון $\otimes$ לסמן את $\sigma$ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ , ההעתקה $x\mapsto\left|f(x)\right|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}:\left|f(x)\right|>\alpha\right\}=:E_\alpha\in L$. ומכאן $\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\left|f(x)\right|>\alpha\right\}=E_\alpha\times\mathbb{R}\in L\otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t)\mapsto\left|f(x)\right|$ מדידה $L\otimes L$.

הפונקציה $t\mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\left\{t\in\mathbb{R}:t>\alpha\right\}=:F_\alpha\in L$, ומכאן $\left\{(x,t):t>\alpha\right\}=\mathbb{R}\times F_\alpha\in L\otimes L$ . הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(x,t)\mapsto\left|f(x)\right|-t$ מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק $\left(\left|f\right|-t\right)^{-1}\left[[0,\infty)\right]$ ולכן מדידה.

3. <u>תרגיל:</u> תהי $\mu$ מידה סופית על $\mathbb{R}$, ונגדיר $\alpha(x)=\mu\left((-\infty,x]\right)$. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=c\mu(\mathbb{R})$ .

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu\left((-\infty,x+c]\right)-\mu\left((-\infty,x]\right)\right]dm(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\left((x,x+c]\right)dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(x,x+c]}d\mu(t)dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):x<t\le x+c\}}d\mu(t)dm(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):t>x\ge t-c\}}d\mu(t)dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):t>x\ge t-c\}}dm(x)d\mu(t)=c\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(t)=c\mu(\mathbb{R})$$

4. חשבו את האינטגרלים $\int\left(\int fdx\right)dy$ , $\int\left(\int fdy\right)dx$ ו $\iint fdx\times dy$ עבור הפונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ על $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ .

פתרון: נחשב את $\int_0^1\frac{1}{2\left(1+y^2\right)y}dy=\int_0^1\left(-\frac{y}{2\left(x^2+y^2\right)}\Big|_0^1 dy\right)=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\right)dy$ .

קל לראות כי מתבדר שכן יש לו סינגולריות של $O\left(y^{-1}\right)$ סביב 0. מטעמי סמטריה נקבל גם את $\int\left(\int fdy\right)dx$ . עבור האינטגרל האחרון נעבור לקורדינטות פולאריות, נשתמש במשפט טונלי ובמשפט ההתכנסות המונוטונית ונקבל

$$\iint\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\times dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^4}r1_{\left\{(r,\theta):[\varepsilon,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\right\}}drd\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_\varepsilon^1\frac{1}{r}dr=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty$$