①

מטלה מס' 7 - פתרונות סופיים

①

א

$$x=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{-t}-6t+14$$
$$y=(C_1+C_2t)e^{-t}+5t-9$$

ב

נתון:

$$\begin{cases} x''+2x+4y=e^t & (1) \\ y''-x-3y=-t & (2) \end{cases}$$

פתרון:

מ (2) נבודד את x ונציב ב (1):

$$(2) \Rightarrow x=y''-3y+t$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} (y''-3y+t)''+2(y''-3y+t)+4y=e^t$$

$$y^{(4)}-3y''+2y''-6y+2t+4y=e^t$$

$$(*) \quad y^{(4)}-y''-2y=e^t-2t$$

הומו:

$$(**) \quad y^{(4)}-y''-2y=0$$

פ"א:

$$\lambda^4-\lambda^2-2=0$$

$$\lambda^2=m$$

$$m^2-m-2=0 \Rightarrow m_{1,2}=\frac{1\pm3}{2} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}, \quad \lambda_{3,4}=\pm i$$

לכן, הפתרון הכללי של (**) הוא:

$$y_h=C_1\cdot e^{\sqrt{2}t}+C_2\cdot e^{-\sqrt{2}t}+C_3\cos t+C_4\sin t$$

נמצא פתרון פרטי של (*):

$$f(t)=\underbrace{e^t}_{f_1(t)}-\underbrace{2t}_{f_2(t)}$$

(1) $f_1(t)=e^t$: $\alpha+i\beta=1$ אינו שורש של פ"א לכן $r=0$.

נחפש את y_{P1} בצורה:

$$\boxed{y_{P_2}=A\cdot e^t}$$

②

(2) $\underline{f_2(t)=2t}$: $\alpha+i\beta=0$ אין שורש של פ"א לכן $r=0$

לכן את y_{p_2} בצורה: $\boxed{y_{p_2}=Bt+C}$

לסיכום, לכן את y_p בצורה $\underline{y_p=Ae^t+Bt+C}$

אזי:

$$y_p'=Ae^t+B$$
$$y_p''=y_p'''=y_p^{(4)}=Ae^t$$

נציב את זה ב ⊗ ונקבל:

$$\underbrace{Ae^t}_{y_p^{(4)}}-\underbrace{Ae^t}_{y_p''}-2\underbrace{(Ae^t+Bt+C)}_{y_p}=e^t-2t$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$-2Ae^t-2Bt-2C=e^t-2t$$
$$e^t:\ -2A=1 \Rightarrow \underline{A=-\tfrac{1}{2}}$$
$$t:\ -2B=-2 \Rightarrow \underline{B=1}$$
$$t^0:\ -2C=0 \Rightarrow \underline{C=0}$$

$\Leftarrow$ $\underline{y_p=-\tfrac{1}{2}e^t+t}$

ומכאן, הפתרון הכללי של ⊗ הוא:

$$\underline{\underline{y}}=y_h+y_p=\underline{C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2\cdot e^{-\sqrt{2}t}+C_3\cos t+C_4\sin t-\tfrac{1}{2}e^t+t}$$

ולכן מ-(2) נקבל ש:

$$\underline{\underline{x}}=y''-3y+t=\left(C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2\cdot e^{-\sqrt{2}t}+C_3\cos t+C_4\cdot\sin t-\tfrac{1}{2}e^t+t\right)''$$
$$-3\left(C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2\cdot e^{-\sqrt{2}t}+C_3\cos t+C_4\sin t-\tfrac{1}{2}e^t+t\right)+t$$
$$=2C_1e^{\sqrt{2}t}+2C_2\cdot e^{-\sqrt{2}t}-C_3\cos t-C_4\sin t-\tfrac{1}{2}e^t-3C_1e^{\sqrt{2}t}-3C_2e^{-\sqrt{2}t}$$
$$-3C_3\cos t-3C_4\sin t+\tfrac{3}{2}e^t-3t+t$$
$$=\underline{-C_1e^{\sqrt{2}t}-C_2e^{-\sqrt{2}t}-4C_3\cos t-4C_4\sin t+\tfrac{3}{2}e^t-2t}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$$ (ג)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/24 \\ 23/48 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 89/120 \\ -89/240 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/24 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -8/15 \\ -1/15 \end{pmatrix}$$ (ד)

(2)

$x = 2e^{3t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$ (א)

$y = e^{3t}(C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t))$

נתון: (ב)

(x) $\bar{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \bar{X}$, $\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

__פתרון__

נמצא ע"ע של מטר' A :

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(1-\lambda)(-3-\lambda) + 5 = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \underbrace{-1}_{\alpha} \pm \underbrace{1}_{\beta} \cdot i$

נמצא ו"ע מתאים לע"ע $\lambda = -1+i$:

$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-(-1+i) & -5 \\ 1 & -3-(-1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ -> נבחר

④

נמצא את:

$$\bar{v}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$\bar{v}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t)$$

$$= \begin{pmatrix} (2\cos t - \sin t) + i(\cos t + 2\sin t) \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix}$$

לכן:

$$Re[\bar{v}(\cos\beta t + i\sin\beta t)] = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$Im[\bar{v}(\cos\beta t + i\sin\beta t)] = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ולכן, הפתרון הכללי של ⊛ הוא:

$$\bar{x} = e^{\alpha t}\left(C_1\cdot Re[\bar{v}(\cos\beta t + i\sin\beta t)] + C_2\cdot Im[\bar{v}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t)]\right)$$

$$= e^{-t}\left(C_1\cdot\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}\right)$$

כעת, נמצא את הפתרון הפרטי שמקיים:

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(0) = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{matrix}}$$

ולכן, הפתרון הפרטי הוא:

$$\underline{\underline{\bar{x}}} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - 3\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (2)

$$\bar{x} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + e^{-t}\left[C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2\cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \\ 3\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix} \right.$$ (9)

$$\left. + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin\sqrt{2}t - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ -\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ 3\sin\sqrt{2}t \end{pmatrix} \right]$$

(3) (1c) נתון:

$$\circledast \quad \bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \bar{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}}_{\bar{b}(t)}$$

פתרון:

נמצא ע"ע:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

נמצא ו"ע מתאים עבור $\lambda = 1$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}_{(A-\lambda I)} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\bar{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{0}}$$

נבחר ו"ע $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

נמצא ו"ע מתאים עבור $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נבחר ו"ע $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה של $\circledast$ הינו:

$$\bar{x}_h = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

אז בכתיב אחר:

$$\bar{x}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} \underset{\bar{x}^{(1)}}{\begin{matrix} e^{t} \\ e^{t} \end{matrix}} & \underset{\bar{x}^{(2)}}{\begin{matrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{X} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הפתרון הכללי של ⊕ לפי שיטת וריאציית המקדמים:

$$\bar{C}'(t) = X^{-1} \cdot \bar{b}(t)$$

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}'(t) = X^{-1}\,\bar{b}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - te^{-t} \\ -e^{2t} + te^{t} \end{pmatrix}$$

$$C_1(t) = \int \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{2} e^{-t} \right) dt = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} + c_1$$

$$C_2(t) = \int \left(-\frac{e^{2t}}{2} + \frac{t}{2} e^{t} \right) dt = \frac{1}{2}te^{t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t} + c_2$$

סה"כ נקבל שפתרון הכללי של ⊕ הוא:

$$\underline{\underline{\bar{x}}} = X \cdot \bar{C}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}te^{t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix} + \bar{C} \right]$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \bar{C}}_{\bar{x}_h} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t}\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{4}\right) + t \\ e^{t}\left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\right) + 2t - 1 \end{pmatrix}}_{\bar{x}_p}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{t} + \frac{1}{5}\cdot e^{-2t} \\ -\frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{t} - \frac{4}{5}e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{t} + \frac{1}{2}\cos t \qquad (8)$$

$$y = (C_2(1-t) - C_1)e^{t} - 2\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

$$x = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ln t + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{4}{25}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$