תרגיל בית 9 אלגברה מופשטת 2

1. (*) הוכח כי עבור פולינום מתוקן $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, אם $\alpha \in \mathbb{Q}$ הוא שורש של $p(x)$ אז $\alpha \in \mathbb{Z}$.
2. (*) מצא יוצר לאידיאל $\mathbb{Z}[x] \triangleright \langle x^3 - x^2 - x + 1, x^5 + x^2 - x - 1 \rangle$.
3. (**) עבור שדה F, הוכיחו כי בחוג $F[x]$ יש אינסוף פולינומיים ראשוניים.
4. (*) פרקו את הפולינום $x^4 - 5x^2 + 6$ לגורמים ראשוניים מעל:
   (א) $\mathbb{Q}$
   (ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
   (ג) $\mathbb{R}$
   (ד) $\mathbb{Z}_5$
5. (*) תנו דוגמא לפולינום אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$ מדרגה ≤ 3 , שלא מקיים את קריטריון אייזנשטיין לאף מס' ראשוני.
6. (*) הוכיחו כי הפולינומים הבאים הם אי-פריקים מעל החוגים המצויינים:
   (א) $x^5 + 867x^4 + 153x + 321$, $\mathbb{Z}$.
   (ב) $x^8 - 6x^3 + 12$, $\mathbb{Z}$.
   (ג) $x^3 + x^2 - 1$, $\mathbb{Z}_3$.
   (ד) $7x^3 - 6x^2 + 2x - 1$, $\mathbb{Z}$.
   (ה) $x^4 + 2x^2 + 4$, $\mathbb{Z}$.
   (ו) $x^7 - 13x^3 + 26$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
7. (**)

(א) הוכיחו כי אם פולינום פרימיטיבי $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ הוא פריק, אז $p(x)$ הוא פריק גם מעל $\mathbb{Z}_p$ לכל ראשוני p,

(ב) הסיקו כי הפולינום $x^4 + x + 1$ הוא אי פריק מעל $\mathbb{Z}$

(ג) הוכיחו כי אין פולינום $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ מדרגה $1 <$ שהוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}_p$ **לכל** המס' הראשוניים p.

8. (**) הוכיחו כי הפולינום $p(x) = \Pi_{k=1}^{n}(x-k) - 1$ הוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}$.