אינפי 1 – פתרון 4

שאלה 1

עבור הסדרות הבאות, קבעו האם קיים גבול (גם במובן הרחב), ואם כן מצאו אותו והוכיחו שהוא אכן הגבול (בכל דרך שתבחרו):

א. $\frac{1}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$

פתרון:

$\frac{1}{n}\to 0$. נראה ש $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ חסומה ומכאן עפ"י משפט $\frac{1}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}\to 0$.

לכל n מתקיים $0\le 1+(-1)^n\le 2$ וכן $1=\frac{1}{1}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\ge\frac{1}{2}$ ומכאן

$0\le\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}\le\frac{1}{1}\cdot 2=2$ ולכן $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ אכן חסומה.

ב. $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

פתרון:

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)}=\frac{n}{n+2}\to 1$$

ג. $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

פתרון:

$$\frac{3^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{3}\frac{3^n}{2^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n\to\infty$$ ($a^n\to\infty$ אם $a>1$, $a^n\to 0$ אם $a<1$)

ד. $\frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}}$

פתרון:

$n^2 \geq 2n$ עבור $2 \leq n$. לכן פרט לאיבר הראשון

$$0 \leq \frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}} < \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{\left(2^2\right)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

ה. $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}$

פתרון:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \geq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^3}} = \frac{n}{2} \to \infty \,.$$

עפ"י משפט נקבל ש $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \to \infty$

ו. $\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}}$

פתרון:

$\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n} \to 0$, לכן מאריתמטיקה של גבולות $\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n} \to 0$. הוכחנו בתרגול
שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת אי שליליים המתכנסת ל L אזי $\sqrt{a_n}$ מתכנסת ל $\sqrt{L}$.
מכאן $\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}} \to \sqrt{0} = 0$

<u>שאלה 2</u>

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}-n$.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0 .$$

שאלה 3

הוכח/הפרך:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, אזי $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

הוכחה: נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, יהי $\varepsilon>0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$ ולפי אי השיוויון שלמדנו בשיעור הראשון, $\left||a_n|-|a|\right|\le|a_n-a|<\varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: ייתכן של $\{a_n\}$ אין אפילו גבול. $1=\left|(-1)^n\right|\to 1$ אבל ל $a_n=(-1)^n$ אין גבול.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: $a_n=(-1)\to(-1)\neq 1$ אבל $a=1$, $|a_n|\to|1|$.

שאלה 4

תהי a_n סדרה מתכנסת לגבול ממשי $L\in\mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאינה מתכנסת. הוכיחו: הסדרה $c_n=a_nb_n$ מתכנסת אם"ם $L=0$.

פתרון:

$\Leftarrow$ נניח $\lim_{n\to\infty} c_n = M\in\mathbb{R}$ צריך להוכיח $L=0$. נניח בשלילה $L\neq 0$ לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\frac{M}{L}$ אבל $\frac{c_n}{a_n}=b_n$ ולכן קיבלנו ש b_n מתכנסת בסתירה. (שימו לב ש $\frac{c_n}{a_n}=b_n$ רק כאשר $a_n\neq 0$ אבל זה נכון, אולי פרט למספר סופי של איברי a_n, מכיוון שגבול הסדרה שונה מאפס).

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

$\Rightarrow$נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, הוכחנו בהרצאה שהמכפלה של סדרה ששואפת לאפס בסדרה חסומה, שואפת לאפס.

<u>שאלה 5</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \to 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $(a_n)^n \to 1$

הפרכה: $a_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$ אבל $a_n^n \to e \neq 1$

ב. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

הוכחה:

$a_n \to 1$ ולכן עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $-\frac{1}{2} \leq a_n - 1 \leq \frac{1}{2}$
לכן לכל $n \geq n_0$ $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$. מכאן לכל $n \geq n_0$: $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2}}$. כעת $\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \to 1$ וגם $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$. לכן ממשפט הכריך נקבל ש $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \to 0$ וכן $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו:

ג. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$

הפרכה: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ אבל $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$.

ד. $(a_n)^n \to 0$

הוכחה:

נראה ש$\left|a_n^n\right| \to 0$ ומכאן נסיק (איך?) ש $a_n^n \to 0$.

$a_n \to 0$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{2}$. נקבל שלכל $n \ge n_0$
$0 \le |a_n{}^n| = |a_n|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

כעת ממשפט הכריך נקבל ש $|a_n{}^n| \to 0$ שכן $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ וכן הסדרה הקבועה אפס מתכנסות לאפס.

ה. $\sqrt[n]{a_n} \to 0$

הפרכה: $0 \leftarrow \frac{1}{n} = a_n$ אבל $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$.

שאלה 6

הוכיחו שאין סדרה חיובית המתכנסת ל-0 הכי מהר או הכי לאט.

הדרכה: הראו שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים חיוביים המקיימת $a_n \to 0$, אזי קיימות סדרות $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות $|b_n| < |a_n| < |c_n|$ אבל $b_n \to 0$ וגם $c_n \to 0$.

הוכחה:

אם ניקח למשל $c_n = 2a_n$, $b_n = \frac{1}{2}a_n$ נקבל מייד הדרוש מאריתמטיקה של גבולות.

שאלה 7

נניח ש- $\frac{a_n}{b_n} \to c \in \mathbb{R}$. נניח ש- $a_n \to \infty$.

א. אם $c \ne 0$, האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, מה ניתן לומר על הגבול? אם לא, מצאו דוגמא נגדית.

פתרון:

b_n מתכנסת במובן הרחב. נוכיח זאת.

מכיוון ש- $b_n = \frac{a_n}{a_n / b_n}$ נקבל מאריתמטיקה של גבולות (במובן הרחב) ש- $b_n \to \infty \cdot sign(c)$. כלומר אם $c > 0$ נקבל ש $b_n \to \infty$ ואם $c < 0$ נקבל ש $b_n \to -\infty$.

ב. אם $c=0$, האם b_n חסומה? הוכיחו את תשובתכם (שימו לב: התשובה היא גורפת. כלומר, הוכיחו שהיא חסומה בהכרח, או שהיא לא חסומה בהכרח).

פתרון:

בהכרח b_n אינה חסומה. נניח בשלילה ש b_n חסומה. $a_n=\frac{a_n}{b_n}\cdot b_n$.

כעת, $\frac{a_n}{b_n}\to c=0$ ו- b_n חסומה ומכאן עפ"י משפט $\frac{a_n}{b_n}\cdot b_n\to 0$. קיבלנו ש$a_n\to 0$ בסתירה לכך שנתון ש $a_n\to\infty$

ג. בסעיף ב', האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, הוכיחו. אם לא – מצאו דוגמא נגדית.

פתרון:

דוגמא נגדית: $b_n=(-1)^n n^2$ אינה מתכנסת במובן הרחב. ניקח $a_n=n\to\infty$ ומתקיים $\frac{a_n}{b_n}=\frac{(-1)^n}{n}\to 0$.