מבוא לטופולוגיה - תרגיל 2

1. יהיה M מרחב מטרי.
   הגדרה: אומרים שסדרה $x_n \in M$ חסומה אם הקבוצה $\{x_n\} \subseteq M$ חסומה.
   להוכיח:
   א' כל סדרת קושי חסומה.
   ב' כל סדרה מתכנסת חסומה.

2. יהיו A, B מרחבים מטריים.להוכיח שהפונקציה $f: A \to B$ רציפה אם ורק אם הקבוצה $f^{-1}(F)$ סגורה לכל קבוצה סגורה $F \subseteq B$.

3. יהיה M מרחב מטרי .
   א' יהיו $a \in M$ ו- $f: M \to \mathbb{R}$ - פונקציה כך שלכל $x \in M$: $f(x) = d(x, a)$.
   להוכיח ש-f פונקציה רציפה.

   ב' יהיו $f, g: M \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות כאשר מטריקה ב-$\mathbb{R}^n$ אוקלידית.
   להוכיח ש- $f + g$ פונקציה רציפה.

4. תזכורת. מרחב מטרי נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי במרחב הזה מתכנסת.
   יהיה M מרחב מטרי שלם ותהי $F \subseteq M$ קבוצה סגורה.
   להוכיח שתת-מרכב F הוא מרחב מטרי שלם.

5. א' יהיו: M מרחב מטרי , הסדרה $x_n \in M$ מתכנסת ל-$x \in M$
   ו- $F = \{x_n\} \cup \{x\}$. להוכיח ש- הקבוצה F סגורה.

   ב' יהיה $\mathbb{R}$ מרכב מטרי עם המטריקה הרגילה $d(x, y) = |x - y|$.

   להוכיח שהקבוצה $F = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots\right\} \cup \{0,1\}$ סגורה.