הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

פתרון תרגיל בית מספר 3

<u>שאלה 1</u>

א.

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{y^2}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}0=0$$
$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{y^2}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}1=1$$

עפ"י משפט מכיון שהגבולות החוזרים קיימים ושונים ניתן להסיק שהגבול הכפול לא קיים.

ב.

מתקיים $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ ורואים שהגבול אינו קיים היות וניתן לקחת $\frac{1}{x}=2\pi k$ ולאחר מכן $\frac{1}{x}=2\pi k+\frac{\pi}{2}$ ונקבל שני גבולות שונים לפי שתי הסדרות האלה.

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}1=1$$

הגבול הכפול לא קיים וניתן לראות זאת לפי בחירת המסלול (למשל) $\begin{matrix}y=0\\x\to0\end{matrix}$.

<u>שאלה 2</u>

מצאו את הנגזרת החלקית לפי המשתנה y בנקודה $(0,2010)$ של הפונקציה:

$$f(x,y)=\sin(xy)\cos(x+y)e^{\tan\left(y^y\right)}$$

שימו לב שמתקיים $f(0,y)=0$ זהותית לכל y. ולכן הנגזרת החלקית לפי y בנקודה $f(0,a)$ היא אפס לכל a. בפרט: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2010)=0$.

<u>שאלה 3</u>

א. קבעו האם הפונקציה הבאה רציפה בכל המישור: $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$

אם נבחר את המסלול $x=y$ נקבל שהגבול הוא $\frac{1}{2}$ (ולא אפס), לכן הפונקציה לא רציפה.

ב. מצאו את הנגזרות החלקיות בנקודה $\left(0,0\right)$ (במידה וקיימות)

$f\left(0,y\right)=0$ זהותית ולכן $f_y\left(0,0\right)=0$ ובאופן דומה מראים שמתקיים $f_x\left(0,0\right)=0$

ג. האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$?

לא, כי היא לא רציפה.

ד. האם מקיום הנגזרות החלקיות של פונקציה נתונה (בנקודה מסויימת) נובעת הרציפות של הפונקציה (באותה הנקודה)?

לא והתרגיל הזה מוכיח זאת.

<u>שאלה 4</u>

בדקו דיפרנציאביליות של הפונקציות בנקודה $\left(0,0\right)$:

א. $f\left(x,y\right)=\sqrt[5]{x^7y^3}$

$$f(x,y)=x^{\frac{7}{5}}y^{\frac{3}{5}}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}f_x=\dfrac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}\quad\Rightarrow\quad f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}0=0\end{cases}$$

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)=f_x(0,0)\cdot h_1+f_y(0,0)\cdot h_2+\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$h_1^{\frac{7}{5}}h_2^{\frac{3}{5}}=\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}\quad\Rightarrow\quad\varepsilon\left(h_1,h_2\right)=\frac{h_1^{\frac{7}{5}}h_2^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$0\le\left|\frac{h_1^{\frac{7}{5}}h_2^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\le\left|\frac{h_1^{\frac{7}{5}}h_2^{\frac{3}{5}}}{h_1}\right|=\left|h_1^{\frac{2}{5}}h_2^{\frac{3}{5}}\right|\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

ב. $f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)=f_x(0,0)\cdot h_1+f_y(0,0)\cdot h_2+\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}=h_1+h_2+\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}\quad\Rightarrow\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}=\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}-\left(h_1+h_2\right)$$

$$\varepsilon\left(h_1,h_2\right)=\frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}-\left(h_1+h_2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

לפי מסלול $h_1=h_2$ מקבלים שהגבול הוא לא אפס ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.