פרמטריזציה

עקומה: פונקציה חלקה(כל הנגזרות רציפות)

$$[a,b]\subset\mathbb{R}$$

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$$

$$t\mapsto\left(\gamma_1\left(t\right),\gamma_2\left(t\right),\ldots\gamma_n\left(t\right)\right)$$

ווקטור משיק: ווקטור הנגזרת

$$T\left(t\right)=\gamma'\left(t\right)=\dot{\gamma}\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\left(\gamma_1',\gamma_2',\ldots\gamma_n'\right)$$

מהירות: $\left|\gamma'\left(t_0\right)\right|$ אורך הווקטור המשיק(מעיד על מהירות התנועה)

נורמל: ב$\mathbb{R}^2$, מתקבל מסיבוב ב$90°$ של $\gamma'\left(t_0\right)=T\left(t_0\right)$.

דוגמאות

1. קו ישר: $\gamma\left(t\right)=\vec{a}+t\cdot\vec{v}$
2. פרבולה:

$$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$

$$t\mapsto\left(t,t^2\right)$$

$$\gamma\left(-1\right)=\left(-1,1\right)\qquad\gamma\left(0\right)=\left(0,0\right)\qquad\gamma\left(1\right)=\left(1,1\right)$$

ווקטור הנגזרת של העקומה:

$$\gamma'\left(t\right)=\left(1,2t\right)$$

$$\gamma'\left(-1\right)=\left(1,-2\right)\qquad\gamma'\left(0\right)=\left(1,0\right)\qquad\gamma'\left(1\right)=\left(1,2\right)$$

הערה: נגזרת של עקומה היא <u>ווקטור</u>.

מהירות:

$$\left|\gamma'\left(t\right)\right|=\sqrt{1+4t^2}$$

$$\left|\gamma'\left(-1\right)\right|=\sqrt{5}\qquad\left|\gamma'\left(0\right)\right|=1\qquad\left|\gamma'\left(1\right)\right|=\sqrt{5}$$

תרגיל

מצא פרמטריזציה של הישר הנורמל לעקומה בנקודה $(1,1)$

פתרון

הווקטור המשיק בנקודה $(1,1)$ הוא $\gamma'(1)=(1,2)$. נסובב ב90 מעלות ע"פ הנוסחה $(x,y)\mapsto(-y,x)$, ונקבל $(-2,1)$. רוצים פרמטריזציה של ישר, והיא

$$l_1(u)=(1,1)+u(-2,1)=(1-2u,1+u)$$

שינוי פרמטריזציה

נמשיך עם הדוגמה של הפרבולה. ראינו פרמטריזציה $\gamma(t)=\left(t,t^2\right)$. ננסה להכפיל את המהירות פי 2. לצורך כך נגדיר פרמטר חדש:

$$t=2q$$

$$\tilde{\gamma}(q)=\left(2q,4q^2\right)$$

נוכיח שזה אכן פי 2 יותר מהר. קודם כל נבדוק שאכן מגיעים לנקודה פי 2 יותר מהר:

$$\tilde{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=(1,1)=\gamma(1)$$

זוהי רק אינטואציה - כדי להוכיח באמת, צריך לבדוק את הגודל של ווקטור המהירות בכל נקודה:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)=(1,2t)\qquad\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}q}(q)=(2,8q)$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(1)=(1,2)\qquad\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{2}\right)=(2,4)$$

נפעיל כלל השרשרת:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}q}$$

נשים לב: $\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}q}$ זה ווקטור המהירות החדש, $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ זה ווקטור המהירות המקורי, ולכן $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}q}$ זה פי כמה המהירות גדלה/קטנה.

באופן כללי

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [c,d] &\to \mathbb{R}^n \qquad & \gamma : [a,b] &\to \mathbb{R}^n \\ q &\mapsto \tilde{\gamma}(q) & t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

. $t(q) : [c,d] \to [a,b]$ היא פונקציה חלקה וההופכית $q(t)$ חלקה. ומתקיים בין ווקטורי הנגזרות

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}q}$$

תרגיל

עבור הישר הנורמל שמצאנו קודם, מצא פרמטריזציה חדשה $\tilde{\gamma}(s)$ כך ש$|\tilde{\gamma}'| = \left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$

פתרון

נחשב מהירות בפרמטריזצי מקורית:

$$l(u) = (1-2u, 1+u)$$

$$l'(u) = (-2,1) \Rightarrow |l'(u)| = \sqrt{5}$$

נשתמש בנוסחה $\underbrace{\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right|}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot \underbrace{\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}\right|}_{\sqrt{5}} = \underbrace{\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}s}\right|}_{1} = 1$. לכן נרצה החלפה כך ש $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$. נבצע אינטגרל ונקבל $u = \frac{1}{\sqrt{5}}s$, ולכן

$$\tilde{l}(s) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}s, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}s\right)$$

הערה

פרמטריזציה שעבורה $|\gamma'(s)| = 1$ נקראת פרמטריזציה במהירות 1

עקמומיות

הגדרת המושג עקמומיות

דרך א
- לקו ישר נשייך עקמומיות 0 - $k = 0$.

- למעגל עם רדיוס R, העקמומיות תהיה $k = \frac{1}{R}$.
- בעקומה כללית, בכל נקודה p נקרב את העקומה ע"י מעגל Q_p. זה נקרא מעגל אסקלטורי(נושק). בכל נקודה הרדיוס R_p של המעגל נקרא <u>רדיוס העקמומיות</u>, והעקמומיות תלויה בנקודה: $k(p) = \frac{1}{R_p}$

דרך ב נמדוד קצב שינוי בכיוון הווקטורים המשיקים ($\gamma' \mapsto \gamma''$). נרצה לדאוג ש"γ'' באמת מודדת שינוי בכיוון. לכן כדי למדוד עקמומיות, נדאג תחילה שהפרמטריזציה במהירות 1 - $\tilde{\gamma}(s)$. העקמומיות מוגדרת $k = |\tilde{\gamma}''(s)|$

תרגיל

מצא את העקמומיות של העקומה $x^2 + y^2 = 9$

פתרון

דרך א $R = 3 \Leftarrow k = \frac{1}{3}$

דרך ב נמצא פרמטריזציה למעגל:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\theta \mapsto (3\cos\theta, 3\sin\theta)$$

נגזור:

$$\gamma'(\theta) = (-3\sin\theta, 3\cos\theta)$$

האורך הוא

$$|\gamma'(\theta)| = 3$$

לכן נבצע שינוי פרמטר $\theta = \frac{s}{3}$:

$$\tilde{\gamma}(S) = \left(3\cos\frac{s}{3}, 3\sin\frac{s}{3}\right)$$

$$\tilde{\gamma}'(s) = \left(-\sin\frac{s}{3}, \cos\frac{s}{3}\right)$$

$$\tilde{\gamma}''(s) = \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{s}{3}, -\frac{1}{3}\sin\frac{s}{3}\right)$$

$$|\tilde{\gamma}''(s)| = \frac{1}{3}$$

הערה

אם $|\tilde{\gamma}(s)|=1$, הווקטור $\tilde{\gamma}''(s)$ מאונך תמיד לווקטור המשיק $\tilde{\gamma}'(s)$ (בפרט $\tilde{\gamma}''(s)$ ת"ל בנורמל).

נוסחה

נוסחה לחישוב עקמומיות של עקומה ב$\mathbb{R}^2$ הנתונה ע"י משוואה $F(x,y)=0$ היא

$$k=\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}$$

כאשר:

- $\nabla F=(F_x,F_y)$ - הגראדיאנט
- D_B אופרטור Bataman.

$$k=\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}\cdot F_x\cdot F_Y+F_{yy}\cdot F_x^2\right|}{\sqrt{\left(F_x^2+F_y^2\right)}^3}$$

תרגיל

מצא את העקמומיות המקסימלית של הפרבולה $y=x^2$

פתרון

$$F(x,y)=y-x^2$$

$$F_x=-2x \qquad F_y=1$$

$$F_{xx}=-2 \qquad F_{yy}=0 \qquad F_{xy}=0$$

$$k=\frac{\left|-2\cdot 1^2-2\cdot 0+0\right|}{\sqrt{(-2x)^2+1^2}^3}=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}^3}$$

$\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\leq 2$, כי המכנה$\geq 1$. ב$x=0$ $k=\frac{2}{\sqrt{0+1}}=2$.

מסקנה: העקמומיות המקסימלית היא 2 ומתקבלת ב$(0,0)$. רדיוס העקמומיות$=\frac{1}{2}$.