חבורות פתירות(המשך)

תזכורת:

א. הגדרה

G חבורה פתירה אם קיימת לה סדרה נורמלית $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd G_k = \{e\}$
שכל גורמיה $0 \leq i < n, {}^{G_i}/_{G_{i+1}}$ אבליים.

דוגמאות לחבורות פתירות

א) G אבלית היא פתירה.

ב) החבורה הדיהדרלית.

ג) S_n עבור $4 \geq n$

לעומת זאת

א) חבורה פשוטה שאינה אבלית אינה פתירה.

ב) S_n עבור $5 \leq n$ אינה פתירה.

ב. הקומוטטור

הגדרה תהא G חבורה. $a, b \in G$. הקומוטטור של c וb הוא $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$

עובדה 1 $ab = ba \Leftrightarrow [a,b] = e$,$\forall a, b \in G$

הגדרה ת"ח הקומוטטור של G היא $G' := \langle\{[a,b] : a, b \in G\}\rangle$.

טענה 2 G אבלית אס"ם $G' = \{e\}$.

טענה 3 לכל חבורה G, $G' \trianglelefteq G$

מסקנה 4 אם G פשוטה שאינה אבלית, $G' = G$.

דוגמה עבור $n \geq 5$, $(A_n)' = A_n$.

עובדה 5 אם $H \leq G$ אז $H' \leq G'$

טענה 6

לכל חב' G, ${}^{G}/_{G'}$ אבלית.

הוכחה

${}^{G}/_{G'}$ אבלית אס"ם

$$\begin{aligned} & \forall a,b\in G && aG'bG'=bG'aG' \\ \Leftrightarrow\ & \forall a,b\in G && abG'=baG' \end{aligned}$$

אס"ם

$$\forall a,b\in G \qquad (ba)^{-1}ab\in G'$$

$$a^{-1}b^{-1}ab\in G'$$

$$\left[a^{-1},b^{-1}\right]\in G'$$

אבל זה נכון לפי הגדרת G'. ■

טענה 7

תהא G חב', $N\trianglelefteq G$. אם ${}^{G}/_{N}$ אבלית אז $G'\trianglelefteq N$

הוכחה

${}^{G}/_{N}$ אבלית אס"ם

$$\begin{aligned} & \forall a,b\in G && aNbN=bNaN \\ \Leftrightarrow\ & \forall a,b\in G && abN=baN \end{aligned}$$

אס"ם

$$\forall a,b\in G \qquad (ba)^{-1}ab\in N$$

אס"ם

$$\begin{aligned} & \forall a,b\in G && a^{-1}b^{-1}ab\in N \\ & \forall a,b\in G && \left[a^{-1},b^{-1}\right]\in N \end{aligned}$$

אס"ם $G'\leq N$, אבל $G'\trianglelefteq G$ ולכן $G'\leq N \Leftarrow G'\trianglelefteq N$. ■

תרגיל

הוכח $S'_n=A_n$

הוכחה

ראשית $A_n \leq S_n$. לכן לפי עובדה 5, $A_n = A_n' \leq S_n$ $(*)$.
שנית, $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ חב' אבלית. לפי טענה 7 $S_n' \trianglelefteq A_n$ $(**)$.
$(*) + (**) \Leftarrow S_n' = A_n$. ■

ג. סדרת הקומוטטור

הגדרה

עבור חבורה G נגדיר

$$G^{(0)} := G$$

$$G^{(1)} := G'$$

ובאינדוקציה

$$G^{(i+1)} = \left(G^{(i)}\right)'$$

משפט

G פתירה אם"ם קיים t סופי כך ש$G^{(t)} = \{e\}$

הוכחה

אם קיים t סופי כך ש$G^{(t)} - e$ אז הסדרה $G = G^{(0)} \rhd G^{(1)} \rhd ... \rhd G^{(t)} = \{e\}$ סדרה נורמלית, לפי טענה 3, שכל גורמיה אבליים לפי טענה 6. לכן G פתירה.

הערה: לא ייתכן $G^{(i+1)} = G^{(i)}$ עבור $G^{(i)} \neq \{e\}$ (מדוע?)

כיוון שני: נניח G פתירה. אז קיימת סדרה נורמלית מאורך סופי t $G = G_0 \rhd G_1 \rhd ... \rhd G_t = \{e\}$ שכל גורמיה אבליים.

מ.ל: ט.ע: לכל $0 \leq i \leq t$ $G^{(i)} \leq G_i$ (כי אז $G^{(t)} \leq G_t = \{e\}$ ולכן $G^{(t)} = \{e\}$)

הוכחת ט.ע.: באינדוקציה על i.
עבור $i = 0$, $G^{(0)} = G \leq G_0$.
נניח נכונות עבור i. ז.א. $G^{(i)} \leq G_i$. לפי עובדה 5, $G^{(i+1)} = \left(G^{(i)}\right)' \leq G_i'$ (i)
לפי טענה 7, מכיוון ש$G_{i+1} \lhd G_i$ ו$G_i/G_{(i+1)}$ אבלית, $G_i' \leq G_{i+1}$ (ii).
$(i) + (ii) \Leftarrow G^{(i+1)} \leq G_{i+1}$. מש"ל ט.ע.

■

ד. תכונות גנאולוגיות של חבורות פתירות

מסקנה א

אם G פתירה, אז

1. כל ת"ח שלה פתירה.
2. כל חב' מנה שלה פתירה.

הוכחה

1. נניח $H \leq G$.
G פתירה, לכן קיים t סופי כך ש$G^{(t)} = \{e\}$. לפי שימוש חוזר בעובדה 5, אם $H \leq G$ אז $H^{(i)} \leq G^{(i)}$ ולכן $H^{(t)} \leq G^{(t)} = \{e\} \Leftarrow H^{(t)} = \{e\}$ וH פתירה.

2. תהא G פתירה. $N \lhd G$. צ"ל G/N פתירה.
אכן, G פתירה לכן קיים t סופי כך ש$G^{(t)} = \{e\}$. תהא $\pi : G \to G/N$ אפימורפיזם קנוני, ז.א. $\pi(g) = gN$.

ט.ע.: לכל $0 \leq i \leq t$ $(G/N)^{m(i} = (\pi(G))^{(i)} = \pi\left(G^{(i)}\right)$.

לפי ט.ע $(G/N)^{(t)} = \{e\}$ ולכן G/N פתירה. ■

מסקנה

תהא G חב', $N \trianglelefteq G$. נניח N פתירה וגם G/N פתירה, אז G פתירה.