תרגיל מספר 1 מבנים אלגבריים

.

1. תזכורת - הגדרה: $(\mathbb{F},+,\cdot)$ יקרא שדה אם:
   - אקסיומות חיבור:
     - סגירות: $\forall x,y\in\mathbb{F}:x+y\in\mathbb{F}$
     - קיבוציות: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}:(x+y)+z=x+(y+z)$
     - חילופיות: $\forall x,y\in\mathbb{F}:x+y=y+x$
     - קיום נטרלי: $\exists 0\in\mathbb{F}:\ \forall x\in\mathbb{F}:x+0=x$
     - קיום נגדי: $\forall x\in\mathbb{F}\exists(-x)\in\mathbb{F}:x+(-x)=0=(-x)+x$
   - אקסיומות כפל:
     - סגירות: $\forall x,y\in\mathbb{F}:x\cdot y\in\mathbb{F}$
     - קיבוציות: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}:(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
     - חילופיות: $\forall x,y\in\mathbb{F}:x\cdot y=y\cdot x$
     - קיום נטרלי: $\exists 1\in\mathbb{F}:\ \forall x\in\mathbb{F}:1\cdot x=x$
     - קיום הופכי: $\forall 0\neq x\in\mathbb{F}\exists x^{-1}\in\mathbb{F}:x\cdot x^{-1}=1=x^{-1}\cdot x$
   - אקסיומות פילוג: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}:x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

(א) יהא $(\mathbb{F},+,\cdot)$ שדה. הוכיחו כי $(\mathbb{F},+)$ חבורה. [בפרט $(\mathbb{C}/\mathbb{R}/\mathbb{Q},+)$ הם חבורות].

פתרון : מאקסיומות חיבור- מסגירות קיבוציות, קיום נטרלי ונגדי - נקבל את המבוקש.

(ב) יהא $(\mathbb{F},+,\cdot)$ שדה. נגדיר $\mathbb{F}^{\times}=\mathbb{F}\backslash\{0\}$ כאשר 0 הוא האיבר הנטרלי לחיבור. הוכיחו כי $(\mathbb{F}^{\times},\cdot)$ חבורה. [בפרט $(\mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}/\mathbb{Q}^{*}\cdot)$ הם חבורות].

פתרון : סגירות: לכל $a,b\in\mathbb{F}^{\times}$ מתקיים כי $ab\in\mathbb{F}^{\times}$. הוכחה: נניח בשלילה כי $ab=0$ ואז נכפיל את המשוואה ב a^{-1} (ההופכי של a שקיים לפי אקסיומות שדה) ונקבל $b=0$. סתירה.

בנוסף, מאקסיומות כפל - קיבוציות, קיום נטרלי והופכי - נקבל את שאר אקיומות חבורה ולכן זוהי חבורה.

2. כיתבו את ההגדרה של מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. (השלימו: $(V,+)$ יקרא מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ אם:...) והוכיחו כי $(V,+)$ חבורה. [בפרט $(\mathbb{R}^{n},+)$ חבורה, $\left((\mathbb{Z}_{2})^{n},+\right)$ חבורה.]

פתרון :

אקסיומות של החיבור ב V. לכל $v,w,u\in V$ מתקיים ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:

- מוגדרות $v+w\in V$.
  - קיבוץ $v+(u+w)=(v+u)+w$.
  - חילוף $v+u=u+v$.
  - איבר נטרלי $\exists 0\in V:\ \forall v\in V: 0+v=v$.
  - איבר נגדי $\forall v\in V\ \exists(-v)\in V:\ v+(-v)=0$.
- אקסיומות של כפל וחיבור של שדה -בהגדרת שדה
- אקסיומות כפל בסקלאר לכל $v,u\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים
  - מוגדרות: $\alpha v\in V$
  - קיבוץ $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
  - כפל יחידה $1_{\mathbb{F}}v=v$
- פילוג
  - $\alpha(v+u)=\alpha v+\alpha u$
  - $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

מאקסיומות חיבור- מסגירות קיבוציות, קיום נטרלי ונגדי - נקבל את המבוקש.

קבעו לכל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות קבע האם היא אגודה/מונאיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה (רגילה/שמאלית/ימנית) מצא אותה. במידה שמדובר בחבורה מצא את ההופכי של כל איבר.

1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X=\{a\in\mathbb{C}\,|\,a^n=1\}$ עם הפעולה של כפל רגיל של מספרים מרוכבים.

   פתרון : חבורה עם היחידה 1 של המספרים המרוכבים.

   סגירות: עבור כל $a,b\in X$ מתקיים כי $a^n=b^n=1$ ולכן $(ab)^n=a^nb^n=1\cdot 1=1$ ולכן $ab\in X$.

   קיבוציות: מתקיים כי כפל מספרים מרוכבים הוא קיבוצי.

   יחידה: המספר 1 המרוכב מקיים $1^n=1$ ולכן $1\in X$ והוא נטרלי לכפל של כל מספר מרוכב ובפרט למספרים ששייכים ל X.

   הופכי: לכל $a\in X$ מתקיים $a\neq 0$ (כי $0^n\neq 1$) ולכן קיים לו הופכי $a^{-1}\in\mathbb{C}$ נראה כי $a^{-1}\in X$ שזה מוכיח שלכל איבר ב X יש הופכי ולכן X חבורה. אכן, $(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}=1^{-1}=1$.

2. קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n>1$, כלומר $\mathbb{F}^{n\times n}$ עם פעולת כפל מטריצות

   פתרון : מונואיד.

   סגירות: לכל A,B מטריצות ריבועיות מתקיים כי AB גם כן מטריצה ריבועית.

   קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי.

   יחידה: מטריצת היחידה I נטרלית לכפל מטריצות.

   כיוון שמטריצת האפס הריבועית שייכת לקבוצה ואין לה הופכי אזי נקבל כי המטריצות הריבועיות הם מונואיד ולא חבורה.

3. המטריצות $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid 0<a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זוהי חבורה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$ וכיוון ש $0<a,a'$ גם $0<aa'$ (וכמובן ש $ab'+ba'\in\mathbb{R}$) נקבל כי הכפל שייך ל G.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי ובפרט כפל מטריצות מ G.

יחידה: מטריצת היחידה $I_2\in G$ כי עבור $a=1>0, b=0$ נקבל כי $I=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

הופכי: עבור מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\in G$ ההופכית שלה (היא קיימת כי הדט' שלה שווה $a^2\neq 0$) היא $\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}\in G$ (כי $0<\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\in\mathbb{R}$). הוכחה:

$$\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = I$$

4. הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם פעולה $a*b=a^b$

פתרון : זה אפילו לא אגודה כי $2=2*1=2*(1*2)\neq(2*1)*2=2*2=4$

5. תת קבוצה של הפולינומים $X=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\,|p(1)=0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.

פתרון : זה חבורה.

סגירות: לכל $p(x),q(x)\in X$ מתקיים כי $p(1)=q(1)=0$ ולכן $(pq)(1)=p(1)q(1)=0$ ולכן $p(x)q(x)\in X$.

קיבוציות: חיבור פולינומים הוא קיבוצי ובפרט חיבור פולינומים מ X.

יחידה: פולינום האפס $\mathbf{0}(x)$ מקיים $\mathbf{0}(1)=0$ ולכן $\mathbf{0}(x)\in X$ והוא נטרלי לחיבור פולינומים ובפרט נטרלי לחיבור פולינומים מ X.

נגדי: לכל $p(x)\in X$ מתקיים כי $p(1)=0$ ולכן $-p(1)=0$ ולכן $-p(x)\in X$ ומתקיים כי $p(x)+(-p(x))=\mathbf{0}(x)$

6. הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם פעולה מקסימום $a*b=\max\{a,b\}$

פתרון : זה מונואיד.

סגירות: לכל a,b טבעיים מתקיים כי $a*b=\max\{a,b\}$ טבעי.

קיבוציות: לכל a,b,c טבעיים מתקיים כי

$$(a*b)*c=\max\{a*b,c\}=\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,b,c\}=$$
$$=\max\{a,\max\{b,c\}\}==\max\{a,b*c\}=a*(b*c)$$

איבר היחידה: 1 כי לכל a טבעי מתקיים כי $1 \leq a$ ולכן $1 * a = \max\{1, a\} = a$ וגם $a * 1 = a$.

אין הופכי ל 2 כי לכל a טבעי מתקיים כי $2 * a = \max\{2, a\} \geq 2 \neq 1$ ולכן G היא מונואיד ולא חבורה.

7. קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G = \left\{ (a, b) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a < b,\ a.b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.
פתרון : זה מונואיד.

סגירות: לכל $(a, b), (a', b') \in X$ מתקיים כי $(a, b) \cap (a', b') = (\max\{a, a'\}, \min\{b, b'\}) \in X$.

קיבוציות: חיתוך קבוצות הוא קיבוצי ובפרט חיתוך קבוצות מ X.

איבר היחידה: $\mathbb{R} \in X$ כי לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ (ובפרט לקבוצות ב X) כי $A \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap A = A$.

אין הופכי ל $(0, 1) \in X$ כי לכל $(a, b) \in X$ מתקיים כי $(a, b) \cap (0, 1) \subseteq (0, 1) \neq \mathbb{R}$ ולכן Gהיא מונואיד ולא חבורה.

8. תת קבוצה של המטריצות $G = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זה אגודה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in G$.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי ובפרט מטריצות מ G.

היחידות ימניות הן $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, a \in \mathbb{R} \right\}$ כי לכל a, b, a' מתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

אין יחידות שמאליות. הוכחה: נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ יחידה שמאלית אזי צריך להתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אבל $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. תת קבוצה של מטריצות משולשיות $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זה אגודה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

אין יחידה. הוכחה: נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ יחידה אזי צריך להתקיים $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ אבל הכפל של מטריצות אלו היא מטריצת האפס.