

בחינת סיום (מועד ב') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)
 מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. תהי G חבורה קומוטטיבית ויהיו $x, y \in G$ כך שהסדרים שלהם מקיימים $o(x) = a$ ו- $o(y) = b$ כאשר a, b זרים. הוכיחו כי מתקיים $o(x * y) = ab$.

ב. תנו דוגמא לחבורה בה טענת סעיף א' לא מתקיימת. (כמובן, עליכם להסביר מדוע הטענה אינה מתקיימת ובפרט לתת דוגמא מפורשת לזוג האיברים x, y שמהווים דוגמא נגדית.)

שאלה 2

א. תהי G חבורה ותהי H תת חבורה נורמלית שלה. נניח כי מתקיים $|G/H| = n$. הוכיחו כי לכל $g \in G$ מתקיים $g^n \in H$.

ב. תנו דוגמא לחבורה בה טענת סעיף א' לא מתקיימת. (כמובן, עליכם להסביר מדוע הטענה אינה מתקיימת ובפרט לתת דוגמא מפורשת לתת החבורה H ולאיבר g שמהווים דוגמא נגדית.)

שאלה 3

א. יהיו a, n טבעיים כך ש- $a < n$. הוכיחו כי אם $\gcd(a, n) > 1$, אז אינו הפיך בחוג Z_n .

ב. יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים מעל השדה F כך ש- $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$ ומתקיים $\gcd(p(x), q(x)) = 1$. הוכיחו כי המחלקה $[p(x)]$ הפיכה בחוג המנה $F[x]/\langle q(x) \rangle$, כאשר $\langle q(x) \rangle$ הוא האידאל הנוצר ע"י הפולינום $q(x)$ בחוג הפולינומים $F[x]$.

שאלה 4

א. תנו דוגמא לשני חוגים קומוטטיביים אינסופיים שאינם איזומורפיים זה לזה. (כמובן, עליכם להסביר מדוע החוגים שבחרתם אינם איזומורפיים.)

ב. תנו דוגמא לשני חוגים קומוטטיביים סופיים עם אותו מספר איברים שאינם איזומורפיים זה לזה. (כמובן, עליכם להסביר מדוע החוגים שבחרתם אינם איזומורפיים.)

שאלה 5

א. נתבונן ב- F_{2^n} , השדה הסופי עם 2^n איברים. הוכיחו כי כל איבר בשדה זה הינו ריבוע. כלומר, לכל $x \in F_{2^n}$ קיים $y \in F_{2^n}$ כך ש- $y^2 = x$.

ב. האם קיים שדה סופי נוסף (פרט לשדות שמספר איבריהם הוא חזקה של 2) בו כל איבר הוא ריבוע?