

חדו"א 1 תרגיל מספר 6 תשפ"א - פונקציות טריגונומטריות, רציפות וגבולות חד-צדדיים

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

2. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{5x}$ ואת הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{5x^2}$

3. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(10x))^{1/x}$

(ג) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2(6x))^{1/x^2}$

4. חשבו את הגבולות החד-צדדיים הבאים:

(א) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^4 - x^5}{x^2 - 4x + 4}$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^5 - 4x^4 + 4x^3}{x^2 - 9x + 14}$

(ג) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^5 + 4x^4 - 4x^3}{x^2 - 4x + 4}$

(ד) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^5 + 6x^4 - 8x^3}{x^2 - 12x + 20}$

5. מצאו את סוג אי-הרציפות בנקודה $x = 0$ של הפונקציות הבאות:

(א) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(ב) $\frac{\sin x}{|x|}$

(ג) $\frac{x \sin x}{|x|}$

(ד) $\frac{\sin x}{x^2}$

6. מצאו באילו נקודות הפונקציה המפוצלת

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-5)(x-1)}{\sin(\sqrt{x-5})} & x > 5 \\ 1 & x = 5 \\ \frac{e^{\frac{1}{x-5}}}{2 + \cos\left(\frac{7}{x-5}\right)} & x < 5 \end{cases}$$

אינה רציפה וקבעו את סוגן.

7. מיינו את נקודות האי-רציפות של פונקצית הערך התחתון $f(x) = [x]$ (למי שלא מכיר)

$$[x] = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

כלומר הערך השלם הגדול ביותר שקטן שווה מ x . מצאו באילו נקודות $f(x)$ רציפה ובאילו נקודות $f(x)$ אינה רציפה. בנקודות ש $f(x)$ אינה רציפה, קבעו מאיזה סוג הן (סליקה, סוג ראשון, סוג שני).

8. תהייה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות. נגדיר פונקציה $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(h פונקציה מפוצלת). הוכיחו/הפריכו:

(א) אם עבור a ממשי מתקיים שקיימים הגבולות $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ (ושני הגבולות שווים ל L ממשי) אזי

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

(ב) אם עבור a ממשי קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ אז מתקיים שקיימים הגבולות $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

חלק ב

1. תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הוכיחו/הפריכו:

(א) אם לכל $0 < a, b$ ממשיים, f רציפה בקטע (a, b) אז f רציפה בכל $(0, \infty)$

(ב) אם לכל $\epsilon > 0$ מתקיים שקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow \epsilon^+} f(x)$ (במובן הרחב) אז קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (במובן הרחב)

2. עבור אילו ערכי α, β ממשיים, הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \alpha x)^{\frac{\alpha}{x}} & x > 0 \\ \beta & x = 0 \\ \frac{1 - \cos \beta x}{x^2} & x < 0 \end{cases}$$

רציפה ב0?

בהצלחה! ☺