מתמטיקה בדידה – תרגיל 5 - פתרונות

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N}, a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N}, a \le b\}$

ג. $R_3 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N}, a = b\}$

פתרון:

א. רפלקסיביות-מכיוון ש $(1,1) \notin R_1$ היחס לא רפלקסיבי.

סימטריות –מכיון ש $(1,2) \in R_1$ אבל $(2,1) \notin R_1$ היחס לא סימטרי.

טרנזטיביות- יהיו $(a,b) \in R_1, (b,c) \in R_1$ על פי הגדרת R_1 $a < b, b < c$ ולכן $a < c$ ו על פי הגדרת R_1 נקבל $(a,c) \in R_1$ ולכן היחס הוא טרנזטיבי.

ב. רפלקסיביות- לכל $a \in N$, $a \le a$ וכל על פי הגדרת R_2 נקבל $(a,a) \in R_2$ ולכן היחס רפלקסיבי.

סימטריות- מכיון ש $(1,2) \in R_2$ אבל $(2,1) \notin R_2$ היחס לא סימטרי.

טרנזטיביות-- יהיו $(a,b) \in R_2, (b,c) \in R_2$ על פי הגדרת R_2 $a \le b, b \le c$ ולכן $a \le c$ ו על פי הגדרת R_2 נקבל $(a,c) \in R_2$ ולכן היחס הוא טרנזטיבי.

ג. רפלקסיביות- לכל $a \in N$, $a = a$ וכל על פי הגדרת R_3 נקבל $(a,a) \in R_3$ ולכן היחס רפלקסיבי.

סימטריות- יהי $(a,b) \in R_3$ על פי הגדרת R_3 נקבל $a = b$ ז"א $b = a$, ולכן על פי הגדרת R_3 נקבל $(b,a) \in R_3$.

טרנזטיביות-- יהיו $(a,b) \in R_3, (b,c) \in R_3$ על פי הגדרת R_3 $a = b, b = c$ ולכן $a = c$ ועל פי הגדרת R_3 נקבל $(a,c) \in R_2$ ולכן היחס הוא טרנזטיבי.

סה"כ קיבלנו יחס שקילות וקבוצת המנה היא לכל $a \in N$ $[a]_{R_3} = \{a\}$ ז"א $N / R_3 = N$.

2. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים מעל $\mathbb{R}$ (הממשיים) קבע האם הוא יחס שקילות:

א. $|x - y| < 1 \Leftrightarrow xRy$

ב. $x - y < 1 \Leftrightarrow xSy$

ג. $x - y < -1 \Leftrightarrow xTy$

<u>פתרון</u>:

א. רפלקסיביות- יהי x מספר ממשי $|x - x| = |0| = 0 < 1$ ולכן על פי הגדרת היחס R נקבל $(x,x) \in R$.

סימטריות- יהי $(x,y) \in R$ מהגדרת היחס R והערך המוחלט נקבל $|y - x| = |x - y| < 1$ ולכן $(y,x) \in R$.

טרנזטיביות- $\left|2\frac{1}{3} - 1\right| > 1, \left|1\frac{2}{3} - 1\right| < 1, \left|2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}\right| < 1$ סה"כ קיבלנו ש $\left(1\frac{2}{3}, 1\right) \in R, \left(2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}\right) \in R$ אבל $\left(2\frac{2}{3}, 1\right) \notin R$ ולכן היחס לא טרנזטיבי.

סה"כ קיבלנו שהיחס R הוא לא יחס שקילות.

ב. רפלקסיביות- כמו בסעיף א.

סימטריות- $\left(2, 1\frac{1}{2}\right) \in T$ אבל $\left(1\frac{1}{2}, 2\right) \notin T$.

טרנזטיביות- - $2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}<1, 1\frac{2}{3}-1<1, 2\frac{1}{3}-1>1$ סה"כ קיבלנו ש

$\left(1\frac{2}{3},1\right)\in T, \left(2\frac{1}{3},1\frac{2}{3}\right)\in T$ אבל $\left(2\frac{2}{3},1\right)\notin T$ ולכן היחס לא טרנזטיבי.

סה"כ קיבלנו שהיחס T הוא לא יחס שקילות.

ג. דומה מאוד לסעיף ב.

3. נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה $A_1, A_2, ..., A_n$ נגדיר יחס R **<u>על</u>** A

ע"י: $R=\{(x,y):$ קיים i עבורו $x\in A_i$ וגם $y\in A_i\}$.

הוכח או הפרך:

א. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \Rightarrow R$ רפלקסיבי.

ב. R רפלקסיבי $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

ג. לכל $1\le i<j\le n$ מתקיים : $A_i \bigcap A_j=\varnothing \Rightarrow R$ רפלקסיבית.

ד. R טרנזיטיבי $\Leftarrow$ לכל $1\le i<j\le n$ מתקיים: $A_i \bigcap A_j=\varnothing$.

פתרון:

א.

נכון יהי $x\in A$ על פי הנתון $x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ על פי הגדרת האיחוד קיים i שעבורו $x\in A_i$ על פי הגדרת היחס R נקבל ש $(x,x)\in R$ ולכן R יחס רפלקסיבי.

ב. נכון

מכיוון ש $A_1, A_2, ..., A_n$ אוסף תת קבוצות של A נקבל ש $\bigcup_{i=1}^{n} A\subseteq A$ נוכיח ש $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} A$.

יהי $x\in A$ נתון ש היחס R רפלקסיבי ולכן היחס $(x,x)\in R$ על פי הגדרת היחס R קיים i שעבורו $x\in A_i$ ולכן $x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

ג. דוגמא נגדית

$A=\{1,2,3\}$ $A_1=\{1\}, A_2=\{2\}$ בדוגמא זו $A_1\cap A_2=\varnothing$ וכן $3\in A$ אבל $(3,3)\notin R$ ולכן היחס לא רפלקסיבי.

ד. דוגמא נגדית

אם $A=\{1,2,3\}$ ו $A_1=\{1\}, A_2=\{1,2\}$ אז $R=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. R טרנזיטיבי אבל $A_1\cap A_2\neq\varnothing$.

4. יהי E יחס שקילות על קבוצה A, ויהי F יחס שקילות על קבוצה B. תהי $G=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \mid (a_1,a_2)\in E,(b_1,b_2)\in F\}$.

הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A\times B$.

פתרון:

רפלקסיביות - יהי $(a,b)\in A\times B$ על פי הגדרת מכפלה קרטזית $a\in A$ על פי הנתון E יחס שקילות על קבוצה A ולכן $(a,a)\in E$ באותו אופן $(b,b)\in F$ על פי הגדרת G נקבל $((a,b),(a,b))\in G$.

סימטריות - יהי $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$ על פי הגדרת G נקבל ש $(a_1,a_2)\in E,(b_1,b_2)\in F$ מכיוון ש E,F הם יחס שקילות נקבל $(a_2,a_1)\in E,(b_2,b_1)\in F$ ומהגדרת G נקבל $((a_2,b_2),(a_1,b_1))\in G$.

טרנזיטיביות - יהיו $\left(\left(a_1,b_1\right),\left(a_2,b_2\right)\right)\in G$, $\left(\left(a_2,b_2\right),\left(a_3,b_3\right)\right)\in G$ על פי הגדרת G נקבל ש $\left(a_1,a_2\right),\left(a_2,a_3\right)\in E,\left(b_1,b_2\right),\left(b_2,b_3\right)\in F$ מכיוון ש E,F הם יחס שקילות נקבל $\left(a_1,a_3\right)\in E,\left(b_1,b_3\right)\in F$ ומהגדרת G נקבל $\left(\left(a_1,b_1\right),\left(a_3,b_3\right)\right)\in G$.

5. A קבוצה.יהיו R ו-S יחסי שקילות על A. הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. $R\cup S$ יחס שקילות.

ב. $(A\times A)\setminus R$ יחס שקילות.

ג. $(A\times A)\setminus R\cup I_A$ יחס שקילות.

ד. $R\setminus S$ יחס שקילות.

(I_A זהו יחס הזהות, לדוגמא אם $A=\{1,2,3\}$ אז $I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$)

פתרון:

א.

לא נכון דוגמא נגדית (שימו לב שיש מקרים ש R,S יחס שקילות על קבוצה A ואכן $R\cup S$ יחס שקילות לדוגמא אם $R=S$)

נניח ש $A=\{1,2,3\}$, $R=\left\{\left(1,1\right),\left(2,2\right),\left(3,3\right),\left(1,3\right),\left(3,1\right)\right\}$ ו $S=\left\{\left(1,1\right),\left(2,2\right),\left(3,3\right),\left(1,2\right),\left(2,1\right)\right\}$

נקבל ש R,S יחס שקילות על קבוצה A וכן $\left(3,1\right),\left(1,2\right)\in R\cup S$ אבל $\left(3,2\right)\notin R\cup S$ ולכן $R\cup S$ לא יחס שקילות.

ב.

לא נכון דוגמא נגדית

נניח ש $A=\left\{1\right\}$ ו $R=\left(1,1\right)$ נקבל ש $\left(1,1\right)\notin\left(A\times A\right)\setminus R$ ולכן לא רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות.

ג.

לא נכון דוגמא נגדית

נניח ש $A=\left\{1,2,3\right\}$, $R=\left\{\left(1,1\right),\left(2,2\right),\left(3,3\right),\left(1,3\right),\left(3,1\right)\right\}$

נשים לב ש $\left(1,2\right),\left(2,3\right)\in\left(A\times A\right)\setminus R\cup I_A$ אבל $\left(1,3\right)\notin\left(A\times A\right)\setminus R\cup I_A$.

ד.

לא נכון דוגמא נגדית

נניח ש $A=\{1,2,3\}$, $R=\left\{\left(1,1\right),\left(2,2\right),\left(3,3\right),\left(1,3\right),\left(3,1\right)\right\}$ ו $S=\left\{\left(1,1\right),\left(2,2\right),\left(3,3\right),\left(1,2\right),\left(2,1\right)\right\}$

נקבל ש R,S יחס שקילות על קבוצה A

אבל $R\setminus S=\left\{\left(1,3\right),\left(3,1\right)\right\}$ לא רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות.

6. תהיינה A,B קבוצות סופיות כך ש $|A|=9,|B|=12$.

א. כמה יחסים שונים ניתן להגדיר מעל A ?

ב. כמה יחסי שקילות מעל A מקיימים את התנאי הבא: "כל מחלקות השקילות הן בעלות 3 איברים בדיוק" ? (רמז: חשבו על הקשר בין יחסי שקילות לחלוקות.)

פתרון:

א. $2^{9\cdot 9}=2^{81}$.

ב. יש למצוא את מספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,...,9\}$ לשלש קבוצות של שלשה איברים בכל אחת. תחילה בוחרים שלשה מספרים מתוך $\{1,2,...,9\}$ב $\binom{9}{3}$ אפשרויות. אח"כ בוחרים עוד שלשה מספרים מתוך ששת המספרים שנותרו ב $\binom{6}{3}$ אפשרויות. הקבוצה השלישית כבר נבחרת אוטומטית. שימו לב

לכך שבדרך זו, כיון שסדר הקבוצות בחלוקה אינו משנה, כל חלוקה נספרת $3!=6$ פעמים. לכן בס"ה נקבל: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}{3!}$ אפשרויות.

<u>בהצלחה!</u>