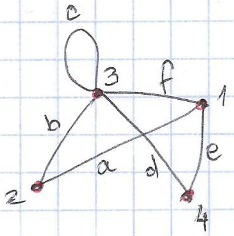
88195 מתמטיקה בדידה: תורת הגרפים

מעגל ומסילת אוילר

הגדרה: מסילה בגרף לא-מכוון נקראת **מסילת אוילר** (Euler) אם היא עוברת דרך כל קשת פעם אחת בדיוק. אם מסילת אוילר היא מעגל, היא נקראת **מעגל אוילר**.

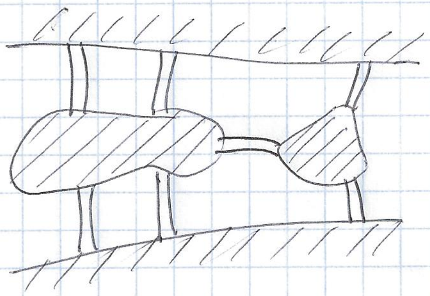


דוגמא: בגרף המצויר, המסילה

1a2b3c3d4e1f3

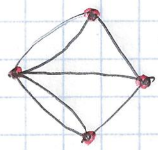
היא מסילת אוילר. היא עוברת פעם אחת דרך כל קשת, אך איננה מסילה פשוטה (כי יש קדקודים, כמו 1 ו-3, שהיא עוברת דרכם יותר מפעם אחת.

בעית קיום מעגל או מסילת אוילר קרויה על שם המתמטיקאי השוויצרי Leonhard Euler, שבמאה ה-18 עסק, למשל, בשאלה האם ניתן לעבור, במהלך טיול בעיר Königsberg, על כל אחד משבעת הגשרים שלה פעם אחת בדיוק.



תאור סכמטי של הבעיה:

הגרף המתאים:



האם יש בו מעגל או מסילת אוילר?

משפט: (Euler, 1753)

יהי G גרף לא מכוון קשיר.

(א) ב-G יש מעגל אוילר אםם לכל קדקדיו יש דרגה זוגית.

(ב) ב-G יש מסילת אוילר אםם יש בו 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

דוגמא: בבעית גשרי קניגסברג, בגרף יש 4 קדקודים עם דרגות 5,3,3,3 שכולן אי-זוגיות, ולכן אין מסילה (או מעגל) אוילר.

הוכחת המשפט:

(א) $\Leftarrow$: נניח ש-G גרף קשיר עם מעגל אוילר. בכניסה ויציאה מקדקוד במעגל משתמשות ב-2 קשתות החלות בו, ו"מורידות" 2 מהדרגה שלו. גם מעבר בלולאה "מוריד" 2 מדרגת הקדקוד שהיא חלה בו. מאחר שבמעגל קדקוד ההתחלה וקדקוד הסיום זהים, נסיק שהמעגל "משתמש" במספר זוגי של קשתות בכל קדקוד. אם בכל קשת עוברים בדיוק פעם אחת (מעגל אוילר), נקבל שבהכרח כל הדרגות זוגיות.

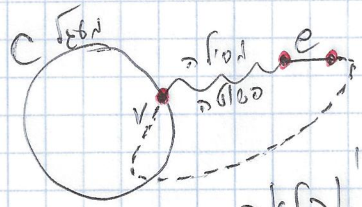
$\Rightarrow$: נניח ש-G גרף קשיר שלכל קדקודיו יש דרגות זוגיות, ונוכיח שיש בו מעגל אוילר. ראשית, אם ב-G אין קשתות אז הוא כולל קדקוד בודד, ויש בו מעגל אוילר באורך 0.

אחרת, יש ב-G קשת אחת לפחות. נראה תחילה שיש בו מעגל. נקח קדקוד שחלה בו קשת, ונתחיל "ללכת" לאורך קשתות, בלי לחזור על אף קשת פעמיים. כמובן לא נוכל להמשיך לנצח (כי מספר הקשתות סופי), ולכן בשלב מסוים נגיע לקדקוד שאין ממנו שום קשת שעוד לא עברנו בה. מאחר שכל הדרגות זוגיות, וכל כניסה ויציאה משתמשת ב-2 קשתות החלות בקדקוד (וגם לולאה נספרת פעמיים בקדקוד), האפשרות היחידה היא שחזרנו לקדקוד ההתחלה ולכן סגרנו מעגל. כמובן, זה לא בהכרח מעגל אוילר.

הוכחנו שיש בגרף מעגל, שבו כל קשת מופיעה פעם אחת לכל היותר. נקח מעגל C כזה באורך מקסימלי. אם הוא עובר דרך כל הקשתות - סיימנו. אם לא - נבחר קשת e שאינה במעגל C.

מאחר שהגרף קשיר, קיימת מסילה מאחד מקדקודי הקשת e לאחד מקדקודי המעגל C. נבחר מסילה כזאת קצרה ביותר (אולי באורך 0). מסילה זו היא בהכרח פשוטה (אם קדקוד מופיע פעמיים, נוכל להשמיט את קטע המסילה בין שתי הופעותיו) ומכילה קדקוד v יחיד מהמעגל C (נקח את הקדקוד הראשון שב-C המופיע במסילה), ומכילה רק אחד מקדקודי e (נבחר את האחרון המופיע במסילה),

~~א~~אינה מכילה את ~~המסילה~~ הקשת e עצמה.



ובודאי לא מכילה קשת של C.

נתחיל עתה "לטייל" מהקדקוד v (על המעגל C), לאורך המסילה הפשוטה הנ"ל, נמשיך לקשת e והלאה, בכל שלב ~~(בזכות זוגיות הדרגות)~~ בלי לחזור על קשת פעמיים ובלי לעבור דרך קשתות של C. בגלל זוגיות כל הדרגות, כמו קודם (המעגל C משתמש במספר זוגי של קשתות מכל קדקוד) הטיול חייב להסתיים בקדקוד ההתחלה v. נקבל כך מעגל חדש C', דרך v, הכולל את הקשת e ואיננו מכיל קשת של C. ברור שניתן להרכיב מהאיחוד $C \cup C'$ מעגל שאינו חוזר על קשת פעמיים ושאורכו גדול ממש מאורכו של C. זה סותר את הנחת המקסימליות לגבי אורך C, ולכן בהכרח C מעגל אוילר.

(ב) $\Leftarrow$: אם ב-G יש מסילת אוילר, אז (מנימוקים כמו קודם) דרגות כל הקדקודים הן זוגיות, פרט לקדקוד ההתחלה לקדקוד הסיום. אם הם זהים (מעגל אוילר), גם דרגתם זוגית; ואם לא, אז לשניהם דרגה אי-זוגית.

$\Rightarrow$: נניח ש-G גרף קשיר עם 0 או 2 קדקודים בעלי ~~הדרגה~~ דרגה אי-זוגית. אם יש 0 כאלו - הרי לפי סעיף (א) יש בגרף מעגל אוילר, שהוא כמובן גם מסילת אוילר. אם יש 2 כאלו - נוסיף לגרף קשת המחברת אותם. קיבלנו גרף קשיר שבו כל הדרגות זוגיות, ולכן לפי סעיף (א) יש בו מעגל אוילר. אם נשמיט מהמעגל את הקשת שהוספנו, נקבל מסילת אוילר בגרף המקורי. ▫

הערה: מסילה העוברת פעם אחת דרך כל קדקוד נקראת מסילת המילטון (Hamilton); כנ"ל למעגל.
קיום מסילה/מעגל כזה הוא בעיה הרבה יותר קשה מבעיית קיום מסילת/מעגל אוילר. לא ידוע תנאי הכרחי ומספיק נוח לכך.
תנאי מספיק (לא הכרחי) הוא: $d(v) \geq \frac{1}{2}|V|$ $(\forall v \in V)$.