תרגיל בית 1 ־ אלגברה לינארית למורים

23 בנובמבר 2016

שאלה 1

תכתוב את כל אחד ממספרים הבאים בצורה $a+bi$:

א) $(1+2i)(3-i)$

פתרון: $5(1+i)$

ב) $\frac{1+2i}{3-i}$

פתרון: $\frac{1}{10}+\frac{7i}{10}$

ג) $(1+i)^4$

פתרון: $(1+i)^4=(1+i)^2(1+i)^2=2i\cdot 2i=-4$

ד) $\frac{1}{2+2i}$

פתרון: $\frac{1}{2+2i}$

ה) $\frac{1}{i^3}$

פתרון: i

ו) i^{100}

פתרון: $i^{100}=\left(i^2\right)^{50}=(-1)^{50}=1$

שאלה 2

מצא את כל שורשים של המשוואות הבאות:

א) $z^2+z+1=0$

פתרון: נשתמש בנוסחה למציאת שורשים של משוואה ריבועית: $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}i$

ב) $z^2+2z+2=0$

פתרון: $z_{1,2}=-1\pm i$

ג) $9z^2+25=0$

פתרון: משתמשים בנוסחת הכפל המקוצר $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ומקבלים: $x^2-(-\frac{25}{9})=x^2-(-\left(\frac{5}{3}\right)^2)=(x-\frac{5}{3}i)(x+\frac{5}{3}i)=0$. ולכן השורשים הם $x=\pm\frac{5}{3}i$.

שאלה 3

פתור את המשוואות הבאות:

א) $4+5i=z-(1-i)$

פתרון: נסמן $z=x+iy$ ונקבל $4+5i=(x+iy)-(1-i)$ ולכן אחרי עברת אגפים והשוואה בין החלקים המדומים וחלקים הממשיים נקבל $x=5$ ו־$y=4$ ולכן הפתרון של משוואה הוא $5+4i$

ב) $(1+2i)z=2+5i$

פתרון: פותרים באות דרך כמו בסעיף א', התשובה סופית היא $\frac{12}{5}+\frac{1}{5}i$

תרגיל 4

מצאו כל $z\in\mathbb{C}$ שך ש:

א) $\bar{z}=i(z-1)$

פתרון: נזכר שאם $z=a+bi$ אזי $\bar{z}=a-bi$, ולכן כמו בסעיף הקודם, נציב $z=a+bi$ במשוואה וע"י שוואה של חלקים המדומים והממשיים נקבל $a=-b$ ו־$-b=a-1$, אין פתרון למערכת משוואות זאת ולכן אין z שיקיים אותה.

ב) $z^2\bar{z}=z$

פתרון: נעביר את z אגף ונוציא אותו מחוץ לסוגריים ונקבל: $z(z\bar{z}-1)=0$ ולכן פתרון של המשוואת הזו היא $z=0$ או כל ה־z־ים אשר מקיימים $z\bar{z}=1$. נזכר ש־$z\bar{z}=|z|^2$ ולפי נוסחה שראינו בהרצאה $|z|^2=a^2+b^2$ כאשר $z=a+bi$. סה"כ קיבלנו שפתרונות למשוואה הם מספרים מרוכבים אשר המלק הממשי והחלק המדומה שלהם נמצאים על מעגל היחידה.

ג) $|z+3i|=3|z|$

פתרון: $|z+3i|=|a+i(b+3)|^2=a^2+(b+3)^2$, $(3|z|)^2=9\left(a^2+b^2\right)$.

נשוואה בין שני הביטויים ונקבל: $a^2+(b+3)^2=9\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow 8\left(a^2+b^2\right)=6b+9$.

אחרי העברת אגפים מקבלים: $a^2+b^2-\frac{3}{4}b=\frac{9}{8}$, נעשה השלמה לריבוע ונקבל $a^2+\left(b-\frac{3}{8}\right)^2=\left(\frac{9}{8}\right)^2$ ולכן כל אותן נקודות אשר מקיימות את המשוואה הם נקודות שהחלקים הממשי והדמיוני נמצאים על מעגל היחידה.

שאלה 5

סעיף א

נכתוב את z בכתיב פולארי, כלומר $z = r\operatorname{cis}\theta$ ולפי דה מואבר $1 = z^7 = r^7 \operatorname{cis} 7\theta$. מכאן נקבל $r^7 = 1$ ולכן $r = 1$ (נזכור ש r תמיד חיובי בכתיב פולארי)
כמו כן, $7\theta = 2\pi k$ (כאשר $k \in \mathbb{Z}$) ולכן $\theta = \frac{2\pi k}{7}$. נזכור שיש משמעות לערכי θ רק בין 0 ל 2π (כי אחרת הם חוזרים על עצמם) ולכן אפשר להסתפק ב $k = 0, 1, 2, \dots, 6$
כלומר הפתרונות הם:

$$z = \operatorname{cis} 0 = 1, \quad z = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{7}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{7}, \dots, z = \operatorname{cis}\frac{12\pi}{7}$$

סעיף ב

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{10} = (\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^{10} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

כלומר המשוואה היא

$$z^4 = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

שוב נכתוב

$$z^4 = r^4 \operatorname{cis} 4\theta = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

ונקבל $r = 1$ ו $4\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ כלומר

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

היות ומחזורים של 2π לא משנים אפשר להסתפק ב $k = 0, 1, 2, 3$ ולכן הפתרונות הם

$$z = \operatorname{cis}\frac{\pi}{8}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{8}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{9\pi}{8}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{13\pi}{8}$$