תרגיל בית 3 ־ אינפי למורים

15 במרץ 2018

שאלה 1:
השלם לריבוע את הביטויים הבאים:

1) $x^2+x+1\frac{3}{4}$

פתרון:
$$x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{6}{4}$$

2) $2x^2+4x+5$

פתרון:
$$2(x^2+2x)+5=2(x^2+2x+1-1)+5=2(x+1)^2+3$$

3) $7x^2+x+100$

פתרון:
$$7(x^2+\frac{x}{7})+100=7(x^2+2\cdot\frac{x}{14}+\frac{1}{(14)^2}-\frac{1}{(14)^2})+100=$$
$$=7(x+\frac{1}{14})^2-\frac{1}{7\cdot 14}+100$$

שאלה 2:
בצע חלוקה של הפולינומים הבאים:

1) $b(x)=x+5$, $a(x)=x^3+9x^2+19x-5$

פתרון:
$$x^3+9x^2+19x-5=(x^2+4x+14)(x+5)-75$$

2) $b(x)=x+5$, $a(x)=3x^3$

פתרון:
$$3x^2=(3x-15)(x+5)+75$$

3) $b(x)=x^3-x$,$a(x)=(x-1)^3$

פתרון:
קודם כל נשים לב ש־$(x-1)$ מחלק את שני הפולינומים ולכן ניתן לצמצם אותו בחלוקה.
מה שנשאר לעשות זה לחלק x^2-2x+1 ב־x^2+x
לאחר חלוקה נקבל שהשארית היא $-3x+1$ ולכן
$$\frac{(x-1)^3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}=\frac{x^2+x-3x+1}{x^2+x}=1-\frac{3x+1}{x^2+x}$$

שאלה 3:

בצע פירוק לשברים חלקיים של הפונקציות רציונאליות הבאות:

1) $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}$

פתרון:

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}=\frac{x^2-2x}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$

$x^2-2x=A(x-1)+B(x-3)$

נציב $x=1$

$-1=-2b$ ולכן $B=\frac{1}{2}$

נציב $x=3$: $3=2A$ ולכן $A=\frac{3}{2}$

ולכן הפירוק הוא $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$

2) $\frac{x^3}{x^2+6x+10}$

פתרון:

נשים לב שהמעלה של המונה היא קטנה יותר מהמכנה לכן נחלק את המונה במכנה ונקבל

$\frac{(x^2+6x+10)(x-6)+20x+60}{x^2+6x+10}=x-6+\frac{20x+60}{x^2+6x+10}$

בנוסף נשים לב שהמכנה אי פריק ולכן זה הפירוק

3) $\frac{x^2+1}{x^2+6x+9}$

פתרון:

כמו בדוגמה הקודמת נשים לב שמעלת המונה שווה למעלת המכנה ולכן לאחר חילוק פולינומים נקבל:

$\frac{x^2+6x+9-6x-8}{x^2+6x+9}=1-\frac{6x+8}{(x+3)^2}$

נזכר של עבור כל חזקה של $(x+3)$ יש שבר חלקי כלומר:

$\frac{6x+8}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$

$6x+8=A(x+3)+B$

לאחר פתרון נקבל: $A=6$, $B=-10$

ולכן הפירוק הוא $1-\frac{6}{x+3}+\frac{10}{(x+3)^2}$

4) $\frac{x}{x^2-5x+6}$

פתרון:

$x^2-5x+6=(x-6)(x+1)$

$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+1}$

$x=A(x+1)+B(x-6)$

$A=\frac{6}{7}$, $B=\frac{1}{4}$

ולכן הפירוק הוא $\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{x-6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$

5) $\frac{11x+17}{2x^2+7x-4}$

פתרון:

$2x^2+7x-4=(x-\frac{1}{2})(x+4)$

$\frac{11x+17}{(x-\frac{1}{2})(x+4)} = \frac{2(11x+17)}{(2x-1)(x+4)} = 2 \cdot \left(\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+4}\right)$
$11x + 17 = 2A(x+4) + 2B(2x-1)$
$A = \frac{5}{2}, B = \frac{3}{2}$
ולכן $\frac{5}{2x-1} + \frac{3}{x+4}$

שאלה 4 (רשות)

חשב את האינטגרלים הבאים בשיטת ההצבה:

1) $\int x \cdot arctan(x^2)dx$.

פתרון:

נציב $t = x^2$, $dt = 2xdx$ ולכן $xdx = \frac{dt}{2}$
$\frac{1}{2}\int arctan(t)dt$
נעשה אינטגרציה בחלקים: $f^{'} = 1$, $g = arctan(t)$ ולכן $f = t$, $g^{'} = \frac{1}{1+t^2}$
ולכן $\frac{1}{2}\left(tarctan(t) - \int \frac{t}{1+t^2}dt\right)$
נחשב את האינטגרל ע"י ההצבה הבאה: $u = 1 + t^2$ ולכן $du = 2tdt$ ולכן $\frac{du}{2} = tdt$
ולכן $\int \frac{t}{1+t^2}dt = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}ln\,|u| + C = \frac{1}{2}ln(1+t^2) + C$
ולאחר שנחזור למשתנה המקורי נקבל:
$\int xarctan(x^2)dx = \frac{1}{2}(x^2arctan(x^2) - \frac{1}{2}ln(1+x^4)) + C$

2) $\int x^3sin(x^2)dx$

פתרון:

$t = x^2$ ולכן $dt = 2xdx$ ולכן $\frac{dt}{2} = xdx$
ולכן $\int x^2sin(x^2)xdx = \int tsin(t)dt$
לאחר אינטגרציה החלקים נקבל: $-tcos(t) + sin(t)$, נחזור למשתנה המקורי ונקבל:
$-x^2cos(x^2) + sin(x^2) + C$

3) $\int e^{sin(x)} \cdot sin(2x)dx$

פתרון:

$\int e^{sin(x)}sin(2x)dx$
נציב $t = sin(x)$, $dt = cos(x)dx$ ולכן $\int e^{sin(x)} \cdot 2sin(x)cos(x)dx = 2\int e^t tdt$
לאחר אינטגרציה בחלקים נקבל: $2\left(e^t t - e^t\right) = 2(e^{sin(x)}sin(x) - e^{sin(x)}) + C$