

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

י' אדר א' תשע"ד

מבחן בפונקציות מרוכבות

מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. א. הוכיח ש- $|z|=1$ אם ורק אם $\bar{z}=1/z$.

ב. הוכיחו ש- $|z-2|=4$ אם ורק אם $\bar{z}-2 = \frac{16}{z-2}$.

ג. הוכיחו שאם $|z-2|=4$ אז $\left| \frac{8-2z}{10-z} \right| = 1$.

2. הוכיחו שאם ב- $B(0,1)$ גם $f(z)$ וגם $f(\bar{z})$ אנליטיות, אז f קבועה ב- $B(0,1)$.

3. א. הוכיחו שהישר $x+y=1$ נתון במרוכבים ע"י $\bar{z} = (1-i) + iz$.

ב. חשבו $\int_{\gamma} z^4 (\bar{z} + \sin z) dz$ כאשר γ היא המשולש בעל קודקודים בנקודות 1, 0 ו- i .
מתואר נגד כיוון השעון.

4. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2+4)} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

5. נגדיר $f(z) = 2ze^z - \frac{2z^3+1}{z^2+4}$ קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל- f בעיגול היחידה $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

6. מצאו את טור לורן סביב $z=1$ של הפונקציה $\frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) - \cos(2z)}{(z-1)^5}$. (הדרכה: $(2z = 2z - 2 + 2)$

בהצלחה!