

# תרגיל בית 10 – טופולוגיה

## שאלה 1

א. הוכיחו שמרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.  
ב. יהי  $X$  מ"ט קומפקטי. יהי  $\{K_i\}_{i \in I}$  אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset \text{ הוכיחו ש-} \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$

## שאלה 2

א. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי. יהיו  $A_1, \dots, A_n$  תתי מרחבים קומפקטיים של

$$X. \text{ הוכיחו ש-} \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ הוא קומפקטי.}$$

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תתי מרחבים קומפקטיים.  
ג. יהי  $X$  מ"ט האוסדורף. יהי  $\{F_i\}_{i \in I}$  אוסף כלשהו של קבוצות קומפקטיות.

$$\text{הוכיחו כי } \bigcap_{i \in I} F_i \text{ קומפקטי.}$$

## שאלה 3

יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ . הוכיחו ש  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \emptyset$ .  
תנו דוגמה נגדית למקרה שתתי המרחבים אינם קומפקטיים.

## שאלה 4

א. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש-  $(X, \tau)$  אינו האוסדורף.  
ב. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיימים  $X$  מספר לא בן מניה של תתי מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תתי מרחבים לא קומפקטיים.  
ג. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי, כך שכל תת מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש-  $(X, \tau)$  קומפקטי.

## שאלה 5

נסמן ב-  $A'$  את אוסף נקודות ההצטברות של  $A$ ; נסמן ב-  $A''$  את אוסף נקודות ההצטברות של  $A'$  וכן הלאה.

יהי  $(X, d)$  מ"מ, תהי  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-

$x \in X$  כך ש  $x_n \neq x$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

תהי  $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

א. מצאו את  $A', A''$ .

ב. האם  $A$  קומפקטי?

ג. האם  $A \cup \{x\}$  קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות

הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסויים פתוחים!**

**בהצלחה!**