אינפי 1 – תרגיל 12

1. גזרו את הפונקציות הבאות לפי הגדרה:
   a. $f(x)=\cos x$
   b. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בנקודה 0. [רמז: אפשר לפתור בעזרת היינה] (שימו לב שזו דוגמא לפונקציה שגזירה בנקודה, ואינה רציפה באף מקום פרט לנקודה)
2. גזרו את הפונקציות הבאות בעזרת משפטים:
   a. $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
   b. $\left(x^3+4\right)^{1000}$
   c. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
3. [שאלה ממבחן של פרופסור זלצמן] גזרו את הפונקציות הבאות:
   a. $2^{x^e}\cdot e^{x^x}$
   b. $\dfrac{\tan(e^{x^2})}{\sqrt{(\log x)^2+1}}$
   c. $\dfrac{1}{\log(\log(e^{e^x}))}$
4. תהי $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. אנו יודעים כי יש לפונקציה זו אי רציפות סליקה ב-0. האם הפונקציה המתקבלת לאחר סילוק אי הרציפות גזירה באפס? כלומר, האם $g(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה באפס? (הוכיחו/הפריכו לפי הגדרת הנגזרת).
5. נניח f מונוטונית עולה וגזירה בכל הממשיים, הוכיחו ש- $0\le f'$ בכל הממשיים (השתמשו בהגדרת הנגזרת, אפשר להשתמש בהיינה ובידע שלנו לגבי סדרות).
6. הוכיחו שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון יחיד.
7. תהי f פונקציה גזירה ב-$\mathbb{R}$ המקיימת: $f(1)=0$ ו- $f(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,1)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ המקיימת $c=-\dfrac{f(c)}{f'(c)}$.

   (רמז: התבוננו בפונקציה $g(x)=xf(x)$)
8. הוכיחו כי $\tan(x)>x$ בקטע $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. א. תהי f פונקציה גזירה ב-(a,b) (כולל האופציה של קרנות) כך ש-
$f'(x)=0$ לכל x בקטע. הוכיחו כי f קבועה.

ב. תהי f פונקציה ממשית כלשהי המוגדרת על כל $\mathbb{R}$. נניח שקיימים
$\alpha>1,\ M\ge 0$ כך ש-$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^{\alpha}$. הוכיחו ש-$f$ קבועה.

בהצלחה!