אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 6

שאלה 1 (הכללה של דברים שהוכחנו בכיתה)

יהיו $E \subseteq K \subseteq F$ שדות. יהי $a \in E$ אלגברי מעל K ויהי $g(x) \in K[x]$ הפולינום המינימלי של a מעל K. הראו כי לכל $\sigma \in Gal(E/F)$, $\sigma(a)$ הוא שורש של $\sigma(g)$.[1]

שאלה 2 (דברים שראינו אך לא הוכחנו בכיתה)

יהי F שדה, $f(x) \in F[x]$, ו-E שדה פיצול של f.

1. יהי K שדה כך ש-$E \subseteq K \subseteq F$ ויהי $\sigma_0: K \to E$ F-הומומורפיזם של שדות. הוכיחו כי קיים $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma|_K = \sigma_0$. [רמז: הראו כי E שדה פיצול של f מעל K.]
2. יהי $b \in E$ ויהי $g(x)$ הפולינום המינימלי של b מעל F. יהי $b' \in E$ שורש נוסף של $g(x)$. הראו כי קיים $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma(b) = b'$. [המלצה: העזרו בסעיף 1.]
3. "שילוב של שני הסעיפים הקודמים": יהי K שדה כך ש-$E \subseteq K \subseteq F$ ויהי $\sigma_0: K \to E$ F-הומומורפיזם של שדות. יהי $b \in E$ ויהי $g(x) \in K[x]$ הפולינום המינימלי של b מעל K. יהי b' שורש של $\sigma_0(g)$. הראו כי קיים $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma|_K = \sigma_0$ וגם $\sigma(b) = b'$.

שאלה 3

עבור כל אחד מהפולינומים הבאים מצאו את שדה הפיצול ואת חבורת הגלואה שלו. עבור כל איבר של החבורה כתבו את התמורה שהוא משרה על שורשי הפולינום וכן את הפעולה שלו על היוצרים של שדה הפיצול.

1. $x^3 - 5$ מעל $\mathbb{Q}$
2. $x^7 - 1$ מעל $\mathbb{Q}$
3. $x^4 + 1$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

שאלה 4

יהי $\rho_3 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$. חשבו את המימד של $\mathbb{Q}\left[2\rho_3 + \sqrt[3]{25} - 3\rho_3\sqrt[3]{5}\right]$ מעל $\mathbb{Q}$. [המלצה חמה: העזרו בשאלות קודמות. הפיתרון אמור לקחת כמה שורות.]

בונוס

יהי F שדה ויהי $\bar{F}$ הסגור האלגברי של F. הוכיחו כי לכל שדה $F \subseteq K \subseteq \bar{F}$ ו-F-הומומורפיזם של שדות $\sigma: K \to \bar{F}$ קיים F-איזומורפיזם של שדות $\tau: \bar{F} \to \bar{F}$ כך ש-$\tau|_K = \sigma$. (זהירות: K/F אינה בהכרח הרחבה ממימד סופי. רמז: תזדקקו ללמה של צורן.)

---

[1] תזכורת: עבור $g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ הגדרנו $\sigma(g)(x) := \sum_{i=0}^{n} \sigma(\alpha_i)\, x^i$.