התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 6: התמרת פורייה ב $L_2(R)$

1. המרחב $L_2(R)$ והתכונות המסוימות שלו

הגדרה 1.1:

יהיו $-\infty \le a < b \le \infty$, $t \in (a,b)$ ו $u(t), v(t)$ 2 פונקציות ממשיות.

פונקציה מהסוג: $t \in (a,b)$ $f(t) = u(t) + iv(t),\ i = \sqrt{-1},$ תקרא פונקציה קומפלקסים (מרוכבת) של ארגומנט ממשי.

דוגמא:

$$f(x) = \cos x + i \sin x,\ x \in R$$

את הפונקציה הזו נהוג לסמן e^{ix};

$$e^{ix} \overset{def}{=} \cos x + i \sin x,\ x \in R \quad (1.1)$$

השוויון (1.1) נקרא נוסחת אוילר.

הגדרה 1.2:

תהי $f(x)$ פונקציה ממשית או מרוכבת עם ארגומנט ממשי $x \in R = (-\infty, \infty)$.
נאמר ש, הפונקציה $f(x)$ שייכת ל $L_2(R)$ אם

1. הפונקציה אינטגרבילית (במובן של רימן)* בכל סגמנט $[a,b],\ b-a < \infty$

2. מתכנס האינטגרל הלא מסוים: $(1.2) \quad \|f\|^2_{L_2(R)} \overset{def}{=} \|f\|^2 \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$

הערה:

אם הפונקציות $f(x), g(x)$ שתיהן אינטגרביליות לפי רימן ב בקטע סופי $[a,b]$, אז גם $f(x)\cdot g(x)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$. מכאן נובע שגם ריבוע הפונקציה בקטע הסופי $|f(x)|^2$ הינה פונקציה אינטגרבילית; במקרה של$L_1(R), L_2(R)$ שני הביטויים $L_1(R)\subseteq L_2(R), L_2(R)\subseteq L_1(R)$ לא נכונים, כפי שנראה בדוגמאות הבאות.

דוגמאות (של המרצה):

$$f(x)=\begin{cases} n^{\alpha} & , x\in\Delta_n=\left[n-\frac{1}{2n^{\beta}}, n+\frac{1}{2n^{\beta}}\right], n\geq 1 \\ 0 & , x\notin\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n \end{cases}$$

נקבל הדוגמאות הדרושות שלנו, בעזרת בחירת α,β:

$$(a)\ \alpha:=\frac{1}{2}, \beta:=2 \Leftarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{n} & , x\in\Delta_n=\left[n-\frac{1}{2n^{2}}, n+\frac{1}{2n^{2}}\right], n\geq 1 \\ 0 & , x\notin\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n \end{cases}$$

אז $f\in L_1(R), f\notin L_2(R)$ ואכן,

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\infty$$

$$\|f\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

(b) $\Leftarrow \alpha:-\frac{1}{2},\beta:=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}} & ,x\in\Delta_n=\left[n-\frac{1}{2\sqrt{n}},n+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right],n\geq 1\\ 0 & ,x\notin\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n\end{cases}$$

אז $f\notin L_1(R), f\in L_2(R)$ ואכן:

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

$$\|f\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<\infty$$

(c) קל לראות שהפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\Delta_n=\left[n-\frac{1}{2n^2},n+\frac{1}{2n^2}\right],n\geq 1\\ 0 & ,x\notin\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n\end{cases}$$

מקיימת את התכונות: $f\in L_1(R), f\in L_2(R)$

$$\| f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\| f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

הערה:

כמו שבמקרה של המרחב $L_1(R)$ האינטגרל ב(1.2) בד"כ מיוחס לפי המובן של לבג,
כפי מקובל בבר אילן לפי הקורסים הנלמדים, אנו מוגבלים ב(1.2) לפונקציות
האינטגראליות לפי המובן של רימן.

הגדרה 1.3:

יהיו $f(x) \in L_2(R), g(x) \in L_1(R)$ אז הערכים:

$$\|g\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt, \quad \| f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} | f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

הם בהתאמה, נורמת הפונקציה g במרחב $L_1(R)$ ונורמת הפונקציה f במרחב $L_2(R)$. הופעת המילה "מרחב" בגדרה תוסבר בהמשך.כעת נעיר על התכונות (העיקריות) של הנורמה: (בהמשך: $p=1$ או $p=2$)

1. $\forall f(\cdot) \in L_p(R) \quad \| f\|_p \geq 0$,בנוסף, השוויון $\| f\|_p = 0$ מתקיים אם ורק אם הפונקציה שווה לאפס כמעט בכל R. (1- **אי שליליות הנורמה**). בפרט אם $f(\cdot) \in L_p(R)$ ובנוסף הפונקציה רציפה בכל נקודה על R, ו $\| f\|_p = 0$ אזי $f \equiv 0$ בR.

2. הומוגניות הנורמה

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \| f\|_p$$

3. אי שוויון המשולש

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall f,g \in L_p(R) \quad (1.4)$$

עבור $p=1$ האי שוויון (1.4) טריוויאלי, עבור $p=2$ נוכיח בהמשך ההרצאה. (1.4) נקרא גם אי שוויון מינקובסקי (הרמן מינקובסקי, 1864-1909)

דוגמא:

קבוצת הפונקציות המוכלות ב$L_p(R)$ מהווה מרחב ליניארי. אכן, אם $f \in L_p(R)$ ו $g \in L_p(R)$ וגם $\alpha,\beta \in C$, אז גם $(\alpha f + \beta g) \in L_p(R)$ ומתקיים:

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \le [see\ 1.4] \le \|\alpha f\|_p + \|\beta g\|_p = [see\ \ 2] =$$
$$= |\alpha| \|f\|_p + |\beta| \|g\|_p < \infty$$

תרגיל: הוכח

$$\left| \|f\|_p - \|g\|_p \right| \le \|f-g\|_p \Leftarrow f,g \in L_p(R) \quad (1.5)$$

הוכחה:

כאן נסתמך רק על אי שוויון (1.4):

$$\|f\|_p = \|(f-g)+g\|_p \le \|f-g\|_p + \|g\|_p$$
$$\|g\|_p = \|(g-f)+f\|_p \le \|g-f\|_p + \|f\|_p$$

אבל

$$\|g-f\|_p = \|(-1)f-g\|_p = |(-1)| \|f-g\|_p = \|f-g\|_p \Rightarrow$$
$$-\|f-g\|_p \le \|f\|_p - \|g\|_p \le \|f-g\|_p \Rightarrow (1.5)$$

הגדרה 1.4:

תהי נתונה $f(\cdot)\in L_p(R)$. קבוצת הפונקציות $g(\cdot)$ עבורן $\|f-g\|_p=0$, תקראנה האלמנט של $f\in L_2$ והן כל הפונקציות האלה לא שונות אחת מהשניה ב $L_2(R)$, אם כך במרחב $L_p(R)$, השוויון: $f(x)=g(x), x\in R, f\in L_p(R), g\in L_p(R)$ גורר $f(x)-g(x)=0$ בכמעט בכל R. פונקציות כאלה נקראות אקוויוולנטיות.

מושג הנורמה אנלוגי למושג האורך של וקטור ומאפשר להשתמש בהתכנסות מסוג חדש – התכנסות בממוצע.

הגדרה 1.5:

תהי נתונה סדרת הפונקציות: $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty},\ \ f_n(x)\in L_p(R),\ \ \forall n\ge 1$

אומרים שסדרה זו מתכנת לפונקציה $f(x)\in L_p(R)$ בממוצע עם מעריך p , אם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0\ \left(\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p}=0\right)\quad(1.6)$$

לפיכך, הפונקציה f נקראת הגבול בממוצע עם מעריך p של סדרת הפונקציות $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$, בהתאם ל(1.6) $\left(\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0\right)$ רושמים כך:

$$f(x)=l.i.m.\,f_n(x)\quad\left(f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}f(x)\right)\quad(1.7)$$

הערה: $l.i.m\equiv\text{limes in medio (latin)}$ גבול בממוצע.

למה 1.6:

תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות שייכות ל $L_p(R)$ (נסמן $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(R)$)

כך ש $f(x) \in L_p(R)$, $f_n(x) \overset{P}{\Rightarrow} f(x)$. אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(x) \|_p = \| f \|_p \quad (1.8)$$

הוכחה:

מ(1.5) נובע: $\left| \| f \|_p - \| f_n \|_p \right| \le \| f - f_n \|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0$

הערה:

השוויון (1.8) מבטא את תכונת הנורמה, אשר נקראת רציפות הנורמה. כעת נברר, איך קשורה ההתכנסות בממוצע עם התכנסות נקודתית, המקובלת באנליזה קלאסית. למטרת פשטות אנו נבחן רק את המקרה של קטע סופי במקום R. עבור המרחב הזה $L_p(a,b),\ b-a<\infty$. מרכיבים את כל הפונקציות אינטגרביליות לפי רימן על הקטע $[a,b]$ ומקבלים: $\| f \|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p}$

(נזכיר, כי אנו חוקרים רק את המקרים שבהם $p = 1, 2$)

משפט 1.7:

תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כך ש

1. כל הפונקציות מוגדרות ב $[a,b]$ ו $f_n(x) \in L_p(a,b),\ b-a<\infty,\ \forall n \ge 1$
2. הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ב$[a,b]$ (עבור $n \to \infty$) לפונקציה $f(x),\ x \in [a,b]$.

אזי: (a) $f_n(x) \overset{P}{\Rightarrow} f(x)$ עבור $n \to \infty$ (b) $f(x) \in L_p(a,b)$

הוכחה:

(b) יהיו $\alpha, \beta \in R$ ו$p \geq 1$. אזי:

$$\left|\alpha + \beta\right|^p \leq 2^p \left(\left|\alpha\right| + \left|\beta\right|\right) \quad (1.9)$$

ואכן:

$$\left|\alpha + \beta\right|^p \leq \left(\left|\alpha\right| + \left|\beta\right|\right)^p \leq 2^p \left(\max\left\{\left|\alpha\right|, \left|\beta\right|\right\}\right)^p \leq$$
$$\leq 2^p \left(\max\left\{\left|\alpha\right|^p, \left|\beta\right|^p\right\}\right) \leq 2^p \left(\left|\alpha\right|^p + \left|\beta\right|^p\right) \Rightarrow (1.9)$$

כיוון ש$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ ב$[a,b]$, אז קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq 1 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$
$$\left|f(x)\right| = \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x)\right| \leq \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x)\right| \leq$$
$$\leq \left|f_n(x)\right| + 1 \Rightarrow (See \;\; 1.9):$$
$$\left|f(x)\right|^p \leq 2^p \left(1 + \left|f_n(x)\right|^p\right), \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$
$$\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx \leq 2^p \int_a^b \left|f_n(x)\right|^p dx + 2^p (b-a) < \infty$$

(a) כיוון ש$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ במידה שווה בקטע $[a,b]$, אז עבור הערך $\sqrt[p]{\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ קיים $N(\varepsilon) \geq 1$ כך שלכל $n \geq N(\varepsilon)$ מתקיים האי שוויון:

$\forall x\in[a,b],\ \left|f_n(x)-f(x)\right|\le\sqrt[p]{\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}}\Leftarrow N(\varepsilon)\ \square\ \forall n$ מקבלים:

$$\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|^p dx\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$ ז"א $f_n(x)\overset{p}{\Rightarrow}f(x)$

כאשר $n\to\infty$.

משפט 1.8:

אם על קטע כלשהו $[a,b],b-a<\infty$ נתונה סדרת פונקציות $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}\in L_p(a,b)$ והפונקציה $f(x)\in L_p(a,b)$ כך ש:

(1.10) $f_n(x)\overset{p}{\Rightarrow}f(x)$ כאשר $n\to\infty$

אז מ(1.10) לא נובע, שהסדרה $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אפילו בנקודה אחת בקטע $[a,b]$.

הוכחה:

מספיק לנו לבנות דוגמא של סדרת פונקציות $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$, שמתכנס בממוצע ב$L_p(a,b)$ ומתבדרת בכל נקודה $x\in[a,b]$. לבנייה הנ"ל ניקח סדרה $l=0,1,2,...$ $1,2,2^2,...,2^l,...,$ לכל l נבנה 2^l אינטרוולים:

$$I_2^{(l)}=\left[\frac{s}{2^l},\frac{s+1}{2^l}\right],s=\overline{0,2^l-1}$$

שמתקבלים על ידי חלוקת החתך $[0,1]$ ל2^l חתכים מאותו האורך. לדוגמא, עבור $l=0,1,2$ נקבל בהתאם:

$$l=0 \Rightarrow s=\overline{0,2^0-1}=\overline{0,0} \Rightarrow I_0^{(0)}=\left[\frac{0}{2^0},\frac{0+1}{2^0}\right]=[0,1]$$

$$l=1 \Rightarrow s=\overline{0,2^1-1}=\overline{0,1} \Rightarrow$$

$$s=0: I_0^{(1)}=\left[\frac{0}{2},\frac{1}{2}\right]=\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

$$s=1: I_1^{(1)}=\left[\frac{1}{2},1\right]$$

$$l=2 \Rightarrow s=\overline{0,2^2-1}=\overline{0,3} \Rightarrow$$

$$I_0^{(2)}=\left[\frac{1}{2},1\right], I_1^{(2)}=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], I_2^{(2)}=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right], I_2^{(2)}=\left[\frac{3}{4},1\right]$$

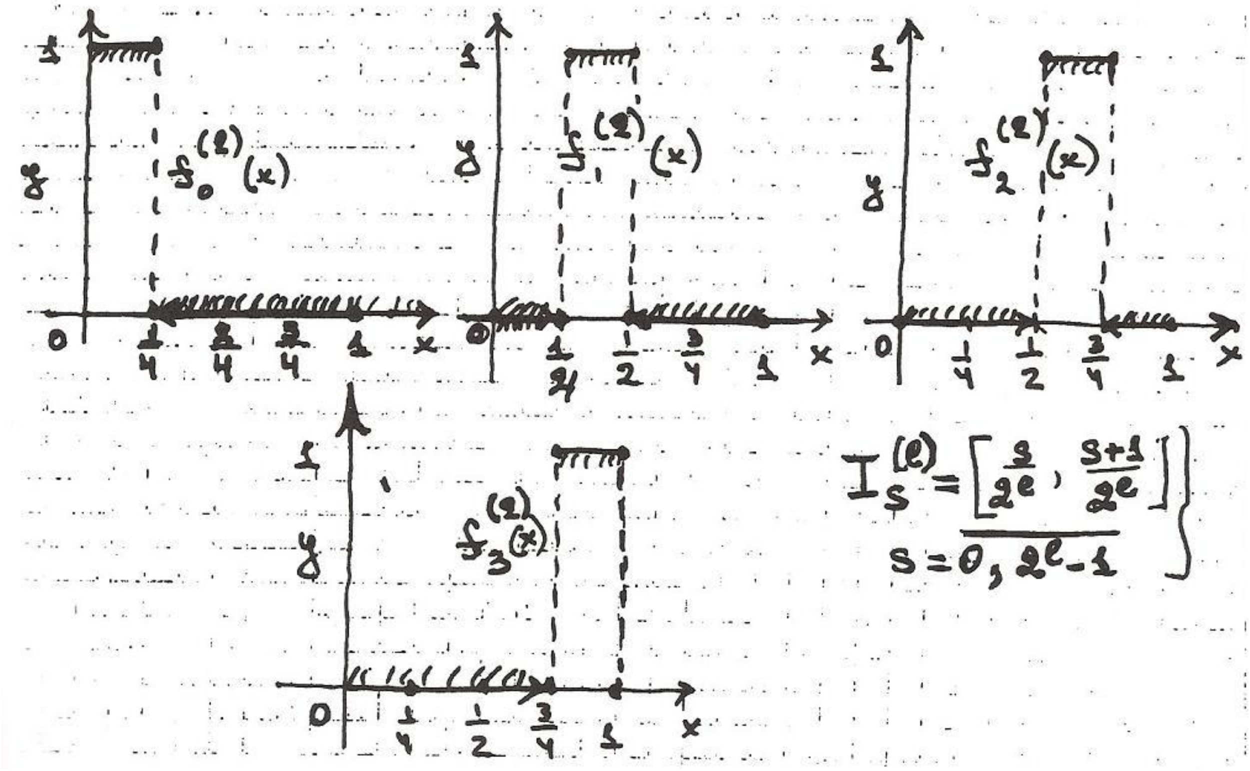
אם כך, עבור $l \geq 0$ הנתון נקבל 2^l חתכים $I_s^{(l)}$, $s=\overline{0,s^l-1}$ מהצורה:

$$I_2^{(l)}=\left[\frac{s}{2^l},\frac{s+1}{2^l}\right], s=\overline{0,2^l-1}$$

כעת לכל $l \geq 0$ ניקח 2^l פונקציות $f_s^{(l)}(x)$ שמוגדרות כך:

$$f_s^{(l)}(x)=\begin{cases}1, & x \in I_s^{(l)} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus I_s^{(l)}\end{cases}$$

לדוגמא עבור $l=2$ נקבל 4 פונקציות:



וכך נקבל סדרת פונקציות:

$$f_s^{0}(x);\ f_0^{(1)}(x),\ f_1^{(1)}(x);\ f_0^{(2)}(x),\ f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ f_1^{(2)}(x);$$
$$f_0^{(3)}(x),\ldots \Rightarrow$$

נמספר את כל הפונקציות לפי הסדר:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$

נעיר שכל פונקציה מוגדרת בחתך $[0,1]$, שווה 1 בחתך I_n מהצורה:

$$I_n = I_s^{(l)} = \left[\frac{s}{2^l}, \frac{s+1}{2^l}\right] \text{ באורך } \frac{1}{2^l}$$

ושווה לאפס בכל הנקודות האחרות $[0,1]$. לפיכך האורך I_n שואף ל0 כאשר $n \to \infty$,

כיוון שעבור $n \to \infty$ ו $l \to \infty$ $\Leftarrow$ $\varphi_n(x) \overset{p}{\Rightarrow} 0, n \to \infty$

אכן, $\int_0^1 \left|\varphi_n(x) - 0\right|^p dx = \int_{I_n} \left|\varphi_n(x)\right|^p dx = Length(I_n) \to 0, n \to \infty$

כעת נראה, שעבור $\forall x_0 \in [0,1]$ הסדרה $\left\{\varphi_n(x_0)\right\}_{x=1}^{\infty}$ מתבדרת. נניח בשלילה:

הסדרה $\left\{\varphi_n(x_0)\right\}_{x=1}^{\infty}$ מתכנסת, לכן לפי קריטריון קושי $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon)$ כך ש

$\forall n, m \ge N(\varepsilon)$ מתקיים האי-שוויון: $\left|\varphi_m(x_0) - \varphi_n(x_0)\right| \le \varepsilon$

יהי $\varepsilon = 1/2$, ברור שתמיד אפשר לבחור n, m כך ש $x_0 \in I_m$ ו $x_0 \notin I_n$

$$\Rightarrow \varphi_m(x_0) = 1, \varphi_n(x_0) = 0, n, m \ge N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\varphi_m(x_0) - \varphi_n(x_0)\right| \le 1 < \frac{1}{2}$$

סתירה. ז"א שהסדרה $\left\{\varphi_n(x)\right\}_{x=1}^{\infty}$ מתכנסת עבור $\forall x \in [0,1]$.

כדי לקשר בין הכנסות בממוצע להתכנסות נקודתית, נזכר בהגדרה מההרצה הראשונה.

הגדרה 1.9:

אומרים שסדרת הפונקציות $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ הנתונות ב(a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ מתכנסת ב(a,b) כמעט בכל מקום לפונקציה $f(x)$ (שגם נתונה ב(a,b)), אם קבוצת הנקודות $x \in (a,b)$ שעבורן $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ne f(x)$ היא במידת אפס.

דוגמא:

תהי $f_n(x)=x^n\,,x\in[0,1]$ $\Leftarrow$ $f_n(x)\overset{n\to\infty}{\to}0$ כמעט בכל מקום על $[0,1]$ (בכל מקום, חוץ מבנקודה $x_0=1$). הקשר בין התכנסות בממוצע והתכנסות כמעט בכל מקום מתוארת במשפט 1.10.

משפט 1.10:

תהיינה נתונות הפונקציות $f(x),\left\{f_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ בקטע הסופי $[a,b]$, כך ש:

$$f(x)\in L_p(R) \text{ ו } f_n(x)\in L_p(R)\quad \forall n\geq 0$$

אם, בנוסף $f_n(x)\overset{p}{\Rightarrow}f(x)$ עבור $n\to\infty$, אז מהסדרה $\left\{f_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ניתן להוציא תת סדרה, שמתכנסת כמעט בכל מקום ב$[a,b]$ ל$f(x)$

תרגיל:

לדוגמא, שבנו במשפט 1.8, למצוא את התת סדרה שעליה מדובר ב1.10 (פונקציה שמתכנסת בממוצע שאינה מתכנסת לנקודה בקטע, שצריך למצוא לה תת סדרה שכן מתכנסת כמעט בכל מקום בקטע)

הערה:

במקרה של קטע סופי מתקיים:

1. מהתכנסות במידה שווה נובעת התכנסות בממוצע, אבל(!!!):
2. מהתכנסות בממוצע לא נובעת אפילו התכנסות רגילה, שלא לדבר על התכנסות במידה שווה, אבל(!!!):
3. מסדרה המתכנסת בממוצע, תמיד ניתן להוציא תת סדרה, שמתכנסת לאותו הגבול כמעט בכל מקום (בקטע כלשהו).
4. אם סדרה מתכנסת נקודתית, אבל לא במידה שווה, אזי היא לא בהכרח מתכנסת בממוצע.

יהי $p=1$ (את המקרה $p=2$ נחקור בצורה דומה)

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ n, & x\in\left(0,\frac{1}{n}\right)\\ 0, & x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\end{cases} \quad , \quad n\ge 1$$

ברור שעבור $x_0\in[0,1]$ מתקיים השוויון: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$. אכן, אם $x_0=0$ אז $f_n(x_0)=0$ עבור $n\ge 1$. אם $x_0\in[0,1]$ אז $\exists n_0 : 0<\frac{1}{n_0}<x_0 \Leftarrow$ עבור $n>n_0$ מתקיים $x_0\in\left[\frac{1}{n},1\right] \Leftarrow \forall n>n_0 \ \ f_n(x_0)=0$, כפי שדרוש. אך עבור $f_n(x_0)\overset{p}{\not\Rightarrow} 0$ כאשר $n\to\infty$, כיוון ש:

$$\int_0^1 |f_n(x)-0|dx=\int_0^1 |f_n(x)|dx=\int_0^{1/n}|f_n(x)|dx=n\frac{1}{n}=1$$ כלומר:

$$\|f_n-0\|_1 \not\to 0, n\to\infty$$

5. אם $b-a=\infty$, אז על קטע באורך אינסופי כל העובדות מ(1) (2) (3) כבר לא מתקיימות.

תרגיל:

תהי $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}} & ,|x|\le n\\ 0 & ,|x|>n\end{cases}$ אז $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ במידה שווה בקטע $(-\infty,\infty)$.

ואכן, עבור $\forall\varepsilon>0$ מתקיים, שאם $n\ge\varepsilon^{-2}$:

$\forall x\in R \quad |f_n(x)-0|=|f_n(x)|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\le\varepsilon$ מה שגורר התכנסות במידה שווה של הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ על $(-\infty,\infty)$ ל-$f\equiv 0$. אבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-0|^2\,dx=\int_{-n}^{n}|f_n(x)|^2\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}2n=2\sqrt{n}\to\infty$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-0|^2\,dx\right)^{1/2}=\left(\int_{-n}^{n}|f_n(x)|^2\,dx\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{n}2n\right)^{1/2}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f_n(x)\overset{p}{\not\to}0,n\to\infty,x\in R$$

נתבונן כעת בתכונה חשובה אחרת של המרחב L_p, נשתמש בהגדרה הבאה.

הגדרה *1.11*:

הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\in L_p(R)$ נקראת *מתכנסת לעצמה* או *פונדמנטלית* , אם

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_m(x)-f_n(x)\|_p=0 \quad (1.11)$$

למה 1.12:

אם הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(R)$ ו $f_n(x) \overset{p}{\Rightarrow} f(x)$ עבור $n \to \infty$, $x \in R$, אז סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - פונדמנטלית.

הוכחה:

לפי אי שוויון המשולש:

$$\| f_m - f_n \|_p \leq \| f_n - f \|_p + \| f_m - f \|_p \to 0, \quad n,m \to \infty$$

למה 1.13:

אם הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(R)$ ופונדמנטלית, אז היא יכולה ללא יותר מגבול אחד.

הוכחה:

נניח בשלילה: $f_n \overset{p}{\Rightarrow} f(x), f_n \overset{p}{\Rightarrow} g(x), n \to \infty$ וגם $f(x) \neq g(x)$ ב $L_p(R)$ (כלומר $\| f - g \|_p \neq 0$)

$$\Rightarrow 0 < \| f - g \|_p \leq \| f - f_n \|_p + \| g - f_n \|_p \to 0, \quad n \to \infty$$

סתירה.

משפט 1.15:

אם סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(R)$ פונדמנטלית, אז קיימת פונקציה יחידה $f(x) \in L_p(R)$ עד כדי אקוויוולנטיות כך ש: $\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \|_p = 0$

ניסוח שקול: הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(R)$ בעלת גבול שקיים ב$L_p(R)$ $\Leftrightarrow$ הסדרה הינה פונדמנטלית(סדרת קושי).

ניסוח שקול: המרחב $L_p(R)$ *מרחב בנך* – כלומר, מרחב ליניארי נורמי שלם.

ההבדל העיקרי בין המרחב $L_2(R)$ למרחב $L_1(R)$ הוא שמרחב $L_2(R)$ אפשר להפעיל מכפלה סקלרית של האלמנטים, אך ב$L_1(R)$ אי אפשר. (ראה בהמשך)

הגדרה 1.16:

יהיו $f(\cdot) \in L_2(R), g(\cdot) \in L_2(R)$. הערך: $\langle f, g \rangle \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ נקרא *מכפלה סקלרית* של האלמנטים f, g מ$L_2(R)$.

מההגדרה 1.16 נובעות התכונות העיקריות של המכפלה הסקלרית:

1. $\langle f, f \rangle = \| f \|_2^2$
2. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
3. $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

$$\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

$$\langle \alpha f, g\rangle = \alpha \langle f, g\rangle$$
$$\langle f, \alpha g\rangle = \overline{\alpha}\langle f, g\rangle$$ .4

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, \sum_{s=1}^{m} \beta_s g_s \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \alpha_k \overline{\beta_s} \langle f_k, g_s\rangle$$ .5

משפט 1.17 (אי שוויון מינקובסקי (1804-1889), קושי (1789-1857), שוורץ (-1843 1921)):

אם $f \in L_2(R), g \in L_2(R)$ $\Leftarrow$

$$\left|\langle f, g\rangle\right| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (1.12)$$

הוכחה:

הביטוי המלא של (1.12) הוא מהצורה:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx\right| \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \quad (1.13)$$

אם $\|f\|_2 = 0$ או $\|g\|_2 = 0$, אז האי שוויון (1.13) טריוויאלי. יהיו $\|f\|_2 \ne 0, \|g\|_2 \ne 0$, נסמן: $\alpha(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_2}, \beta(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_2}$ $\Leftarrow$

$\|\alpha\|_2 = \|\beta\|_2 = 1$ וכעת האי שוויון שלנו אקוויוולנטי לאי שוויון (1.14):

$\left|\langle \alpha, \beta\rangle\right| \le 1$ באשר $\|\alpha\|_2 = \|\beta\|_2 = 1$ (1.15)

נבדוק את 2 האחרונים. $\forall x \in R$ מתקיים:

$$\left|\alpha(x)\overline{\beta(x)}\right| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| \le \frac{|\alpha(x)|^2}{2} + \frac{|\beta(x)|^2}{2} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha(x)\overline{\beta(x)}\right| dx =\le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\infty} |\alpha(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\infty} |\beta(x)|^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\langle \alpha, \beta \rangle\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\overline{\beta(x)} dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha(x)\overline{\beta(x)}\right| dx \le 1$$

מסקנה 1.18:

אם $f \in L_2(R), g \in L_2(R)$ $\Leftarrow$

$$f \cdot g \in L_1(R), \|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (1.16)$$

מסקנה 1.19:

אם $f \in L_2(R), g \in L_2(R)$ אז מתקיים אי שוויון המשולש (מינקובסקי):

$$\|f + g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad (1.17)$$

הוכחה:

נשתמש בתכונות (1) (2) (3) של המכפלה הסקלרית והאי שוויון (1.12):

$$
\begin{aligned}
&\| f+g\|_2^2=\langle f+g, f+g\rangle=\langle f, f+g\rangle+\langle g, f+g\rangle= \\
&=\langle f, f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g, f\rangle+\langle g,g\rangle=\| f\|_2^2+\left(\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}\right)+\|g\|_2^2= \\
&=\| f\|_2^2+2\operatorname{Re}\langle f,g\rangle+\|g\|_2^2\le\| f\|_2^2+2\left|\langle f,g\rangle\right|+\|g\|_2^2\le \\
&\le\| f\|_2^2+2\| f\|_2\|g\|_2+\|g\|_2^2=\left(\| f\|_2+\|g\|_2\right)^2\Rightarrow \\
&\| f+g\|_2\le\| f\|_2+\|g\|_2
\end{aligned}
$$

נסיים את חקירת התכונות של $L_2(R)$ בהסבר מדוע אסור להפעיל ב $L_1(R)$ מכפלה סקלרית.

המשפט הבא משתמש במושג של נורמה במרחב הלינארי.נשים לב, (מבלי להיכנס לפרטים) כי במקרה שלנו חשוב לדעת ,שב-$L_1(R)$ בנורמה של אלמנט $f=f(x)\ ,\ x\in R$ הכוונה למספר:

$$\| f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

משפט 1.20:

במרחב ליניארי נורמי ניתן להגדיר מכפלה סקלרית אם ורק אם לכל שני אלמנטים f ו- g של המרחב הנ"ל, מתקיימת הזהות:

$$\| f+g\|^2+\| f-g\|^2=2(\| f\|^2+\|g\|^2) \qquad (1.18)$$

נבדוק שב-$L_1(R)$ הזהות (1.18) מתקיימת לא לכל נורמה f ו- g מ-$L_1(R)$.תהי

$$f(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\in[-2,1]\\ 0\ ,\ x\notin[-2,1]\end{cases}\ ,\ g(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\in[-1,2]\\ 0\ ,\ x\notin[-1,2]\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\|f\|_1=3\ ,\ \|g\|=3\ \Rightarrow\ 2(\|f\|_1^2+\|g\|_1^2)=36.$$

אם כך,

$$\left.\begin{array}{l}\|f+g\|_1=1\cdot 3+1\cdot 3=6\\ \|f-g\|_1=1+1=2\end{array}\right\}\Rightarrow\|f+g\|_1^2=36,\|f-g\|_1^2=4$$

$$\Rightarrow\|f+g\|_1^2+\|f-g\|_1^2=40\neq 36=2(\|f\|_1^2+\|g\|_1^2)$$

ולכן,לפי משפט 1.20 ב-$L_1(R)$אי אפשר להגדיר את המכפלה הסקלרית.

2.התמרת פורייה במרחב $L_2(R)$

תהי פונקציה $f(x)\in L_2(R)$ $\Leftarrow$ $\forall N\geq 1$ ידוע:

$f(x)\in L_2(-N,N)$ (נזכיר, שב- $f\in L_2(a,b),(b-a)<\infty$ הכוונה ש-
$f(\cdot)$ אינטגרבילית לפי רימן על $[a,b]$)

$$(\|f\|_{L_2(a,b)}\overset{def}{:=}(\int_a^b|f(x)|^2\,dx)^{1/2}$$

אם כך, $f(x)\in L_1(-N,N)$ ז"א,

$$\int_{-N}^{N}|f(x)|dx=\int_{-N}^{N}|f(x)|\cdot 1dx\le|\,Schwarz\ inequality|\le$$
$$\le(\int_{-N}^{N}|f(x)|^2dx)^{1/2}(\int_{-N}^{N}1^2dx)^{1/2}=(2N)^{1/2}(\int_{-N}^{N}|f(x)|^2dx)^{1/2}$$
$$\le(2N)^{1/2}(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx)^{1/2}=(2N)^{1/2}\|f\|_2<\infty$$

וזה מאפשר הגדרת התמרת פורייה ב-$L_2(R)$.נגדיר פונקציה הבאה

$$f_N(x)=\begin{cases}f(x)\ ,\ |x|\le N\\ 0\ ,\ |x|>N\end{cases}$$

הראינו לעיל,כי $f_N(x)\in L_1(R)$, כיוון ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_N(x)|dx=\int_{-N}^{N}|f(x)|dx\le(2N)^{1/2}\cdot\|f\|_2<\infty$$

אזי עבור $F_N(x)$ קיימת התמרת פורייה רגילה (ב-$L_1(R)$):

$$F_N(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x)e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}f(x)e^{i\sigma x}d\sigma$$

הטענה הבאה היא טענה עיקרית בתיאוריה של התמרות פורייה במרחב $L_2(R)$.

משפט 2.1 (משפט של מישל פלנשרל,שוויץ,1885-1967):

לכל פונקציה $f(\cdot)\in L_2(R)$ אינטגרל $F_N(\sigma)$:

$$F_N(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}f(x)e^{i\sigma x}dx\ ,\ \sigma\in R\quad (2.1)$$

לכל $N\ge 1$ הינו פונקציה של σ,השייכת ל-$L_2(R)$:

$$\forall N \geq 1 \text{ עבור } F_N(\sigma) \in L_2(R) \quad (2.2)$$

מעבר לכך,הסדרה $\left\{F_N(\sigma)\right\}_{N=1}^{\infty}$ הינה פונדמנטלית (ז"א סדרת קושי) ב- $L_2(R)$ ולכן קיים גבול הממוצע הריבועי:

$$F(\sigma) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.} F_N(\sigma) \ , \ \forall f \in L_2(R) \quad (2.3)$$

כאשר:

$$\left\| F(\sigma) \right\|_2 = \left\| f \right\|_2 \ , \ \forall f \in L_2(R) \quad (2.4)$$

הערה:

השוויון (2.4) נקרא שוויון פרסיבל. הפונקציה $F(\sigma)$ נקראת התמרת פורייה של הפונקציה $f \in L_2(R)$.

הערה:

אם $f(\cdot) \in L_1(R) \bigcap L_2(R)$,אזי הפונקציה (2.3) $F(\sigma)$ מתלכדת עם התמרת פורייה של הפונקציה $f(\cdot)$ ב- $L_1(R)$:

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma t} dt \ , \ \sigma \in R \quad (2.5)$$

לכן,לכל פונקציה $f \in L_2(R)$ קיימת התמרת הפורייה שלה $F(\sigma)$, המוגדרת ב (2.3).בנוסף,אם $f \in L_1(R) \bigcap L_2(R)$,אזי הנוסחא (2.3) מגדירה את אותה ההתמרה שהגדרנו קודם ב-(2.5) (בנוסחא "הישנה").

ברור,שאם $f \in L_1(R) \bigcap L_2(R)$,אזי קל יותר לחשב את $F(\sigma)$ לפי הנוסחא (2.5) ולא לפי (2.3).

שלושת הטענות הבאות נקראות הכללות של שוויון פרסיבל.

מסקנה 2.2:

תהי $f(x)\in L_2(R)$ ו-$g(x)\in L_2(R)$. נסמן את התמרות הפורייה שלהן בהתאמה כ-$F(\sigma)$ ו-$G(\sigma)$. אזי מתקיים השוויון:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)\cdot\overline{G(\sigma)}d\sigma \quad (2.6)$$

הערה:

השוויון (2.6) נוח לשימוש במיוחד אם $f(x)$ ו-$g(x)$ שתיהן שייכות ל-$L_1(R)\bigcap L_2(R)$, אזי $F(\sigma)$ ו-$G(\sigma)$ מחושבות לפי הנוסחא (2.5). אם $f(x)$ או-$g(x)$ אינן שייכות ל-$L_2(R)$ אלא אך ורק ל-$L_1(R)$, אזי השוויון (2.6) נכון עם דרישות נוספות עבור f ו-g.

בפרט מתקיים:

משפט 3.:2

תהי $f(x)\in L_1(R)$, $\exists f''(x)\in L_1(R)$ ו-

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\lim_{|x|\to\infty} f'(x)=0 \quad (2.7)$$

אזי לכל פונקציה $g(x)\in L_1(R)$ מתקיים השוויון (2.6).

במשפט הבא מפורטים תנאים אחרים, המביאים לשוויון (2.5).

משפט 2.4:

יהיו $f(x),g(x)\in L_1(R)\bigcap C(R)$ ו- $F(\sigma),G(\sigma)\in L_1(R)\bigcap C(R)$

(כאן $f(\sigma):=F(\sigma),g(\sigma):=G(\sigma)$ והתמרות פורייה במובן של $L_1(R)$(ראה (2.5))).

אזי הנוסחא (2.6) נכונה.

משפט 2.5(נוסחת הכפל):

יהיו $f(x),g(x)\in L_1(R)\bigcap C(R)$ ו- $F(\sigma),G(\sigma)$ התמרות פורייה (במובן (2.5)) של הפונקציות f ו- g בהתאמה.אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)dx \quad (2.8)$$

כעת נחזור לבעיית התמרת פורייה ההפוכה ב- $L_2(R)$.אם כך,ידוע, שהפונקציה $F(\sigma)\in L_2(R)$ הינה התמרת פורייה של פונקציה מסוימת $f\in L_2(R)$. נדרש למצוא את הפונקציה f .

משפט 2.5(פלנשרל):

תהי $F(\sigma)$ התמרת פורייה של הפונקציה $f\in L_2(R)$. נגדיר פונקציות:

$$\phi_N(\sigma)=\begin{cases} F(\sigma)\ , & |\sigma|\le N \\ 0\ , & |\sigma|>N \end{cases}$$

לכל $N\ge 1$ פונקציה:

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_N(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

הינה פונקציה של x, השייכת ל-$L_2(R)$:

$$\varphi_N(x)\in L_2(R)\quad \forall N\geq 1$$

חוץ מכך,הסדרה $\left\{\varphi_N(x)\right\}_{N=1}^{\infty}$ הינה פונדמנטלית (ז"א סדרת קושי) ב-$L_2(R)$, ולכן קיים גבול הממוצע הריבועי שלה והינו שווה ל-$f(x)$:

$$f(x)=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (2.9)$$

הערה:

במקרה ש- $f\in L_1(R)\bigcap L_2(R)$ ו- $f(\sigma)=F(\sigma)\in L_1(R)\bigcap L_2(R)$ נחדד את המקרה במשפט נפרד.

משפט 2.6:

אם מתקיים התנאי: $f(x)\in L_1(R)\bigcap L_2(R)$. אזי התמרת פורייה של $f(x)$ ב- $L_1(R)$ ו- $L_2(R)$ מתלכדות, וערכן המשותף מהצורה:

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx\ ,\ \sigma\in R \quad (2.10)$$

אם בנוסף $F(\sigma)\in L_1(R)\bigcap L_2(R)$, אזי התמרת פורייה ההפוכה ב- $L_2(R)$ מהצורה:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (2.11)$$

כאשר האינטגרל הינו אינטגרל רגיל לא אמיתי.

הערה:

השוויונות (2.10) ו-(2.11) מתקיימים "כמעט בכל מקום".

3.תרגילים

קודם כל נשים לב,שההבדל הפרקטי בין תיאוריות התמרת פורייה של L_1 ו- L_2, הינו בכך, שבתיאוריה של L_1:

$$f(\sigma) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx \ , \ f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

ובתיאוריה של L_2, הסימן $v.p.$ מופיע גם בהתמרה הישירה:

$$f(\sigma) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx \ , \ f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

תרגיל (של המרצה):

בדוק משפט פלנשרל במקרה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \ , \ x \in R$$

פתרון:

ברור ש $f(x) \notin L_1(R)$ ו- $f(x) \in L_2(R)$:

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|dx}{1+x^2}=2\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

$$\|f\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{dx}{1+x^2}\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^{\infty}=\pi<\infty$$

אזי,לצורך חישוב $f(\sigma)$ נצטרך להשתמש במשפט פלנשרל.ובמקומות הדרושים אנו נעזר במשפט השארית.

<u>1.חישוב $F(\sigma)$</u>

$$F(\sigma)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{i\sigma x}dx$$

בהתאמה לסימן של σ,נטפל במקרים הבאים בנפרד (ראה הרצאה 2, בנושא שימוש בשארית):

(א). $\sigma>0$ (ב). $\sigma=0$ (ג). $\sigma<0$

(א). $\boxed{\sigma>0}$ $\Leftarrow$

$$F(\sigma)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{i\sigma x}dx=\left|\begin{matrix}\sigma>0\Rightarrow\\ \underline{z=i}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z}{1+z^2}e^{i\sigma z}=\sqrt{2\pi}\cdot i\,\frac{ze^{i\sigma z}}{(1+z^2)'}\Big|_{z=i}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\frac{ie^{i\sigma i}}{2i}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot i\cdot e^{-\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot i\cdot e^{-|\sigma|}$$

ב). $\boxed{\sigma=0}$ $\Leftarrow$

$$F(\sigma)\big|_{\sigma=0}=F(0)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=0$$

בגלל שהפונקציה אי זוגית.

ג). $\boxed{\sigma<0}$ $\Leftarrow$

$$F(\sigma)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{i\sigma x}dx=\left|\begin{matrix}\sigma<0\Rightarrow\\ \underline{z=-i}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(-2\pi i)\cdot\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{z}{1+z^2}e^{i\sigma z}=-\sqrt{2\pi}\cdot i\,\frac{ze^{i\sigma z}}{(1+z^2)'}\bigg|_{z=-i}=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\frac{(-i)e^{i\sigma(-i)}}{-2i}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot i\cdot e^{\sigma}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot i\cdot e^{-|\sigma|}$$

לכן,

$$F(\sigma)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot i\cdot e^{-\sigma}, & \sigma>0\\ 0, & \sigma=0\\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot i\cdot e^{\sigma}, & \sigma<0\end{cases}$$

<u>2.התמרה הפוכה</u>

כעת צריך לבדוק את השוויון

$$f(x)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

באופן כללי, גם כאן משתמשים במשפט השארית,אך במקרה הנדון ניתן להסתמך על השיטות הבסיסיות:

$$\varphi_R(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-R}^{0} F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma + \int_{0}^{R} F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma] =$$

$$= \frac{i}{2}[-\int_{-R}^{0} e^{\sigma}\cdot e^{-i\sigma x}d\sigma + \int_{0}^{R} e^{-\sigma}\cdot e^{-i\sigma x}d\sigma] =$$

$$= \frac{i}{2}[-\int_{-R}^{0} e^{\sigma(1-ix)}d\sigma + \int_{0}^{R} e^{-\sigma(1+ix)}d\sigma] =$$

$$= \frac{i}{2}\{-\frac{1}{1-ix}e^{\sigma(1-ix)}\Big|_{-R}^{0} - \frac{1}{1+ix}e^{-\sigma(1+ix)}\Big|_{0}^{R}\} =$$

$$= \frac{i}{2}\{-\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1-ix}e^{-R(1-ix)} + \frac{1}{1+ix} - \frac{1}{1+ix}e^{-R(1+ix)}\} \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty}\varphi_R(x) = \frac{i}{2}[\frac{1}{1+ix} - \frac{1}{1-ix}] = -i^2\frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$$

תרגיל:

חשב את האינטגרל הבא,בעזרת שוויון פרסיבל:

$$J(a) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\ ,\ a>0$$

פתרון

הפונקציה:

$$f(x) = \frac{1}{(a^2+x^2)^2} \in L_1(R)\bigcap C(R)$$

והאינטגרל $J(a)$ שווה ל:

$$J(a)=\| f\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+x^2}\cdot\overline{\frac{1}{a^2+x^2}}\,dx$$

נחשב $f(\sigma)$ במובן $L_1(R)$:

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma x}}{a^2+x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\sigma|}}{a}$$

(לפי תרגיל בהרצאה 2)

$$\Rightarrow\; F(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\sigma|}}{a}\in L_1(R)\bigcap C(R)$$

אזי,לפי משפט 2.4 נקבל:

$$\| f\|_2^2=\left\|F(\sigma)\right\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\sigma)\right|^2 d\sigma=\left|F(\sigma)=F(-\sigma)\right|=$$

$$=2\int_0^{\infty}\left|F(\sigma)\right|^2 d\sigma=2\cdot\frac{\pi}{2}\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}e^{-2\sigma a}d\sigma=$$

$$=\frac{\pi}{a^2}[-\frac{e^{-2\sigma a}}{2a}\Big|_0^{\infty}]=\frac{\pi}{2a^3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{J(a)=\frac{\pi}{2a^3}}$$

תרגיל:

חשב את האינטגרל הבא,בעזרת שוויון פרסיבל:

$$J(a)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}dx\;,\;a>0$$

פתרון:

ידוע (ראה הרצאה 1):

$$\Leftarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$ (אינטגרל דריכלה)

$$\Leftarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\pi$$

גורם דריכלה אי רציף

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx=\begin{cases}\pi\ ,\ \alpha>0\\ 0\ ,\ \alpha=0\\ -\pi\ ,\ \alpha<0\end{cases}$$

נחזור ל-$J(a)$:

$$\Leftarrow J(a)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}dx=\frac{1}{2}\left\|\frac{\sin ax}{x}\right\|_2^2$$

ברור ש $f(x)=\frac{\sin ax}{x}\in L_2(R)$ ו- $f(x)\notin L_1(R)$

נמצא $f(\sigma)$:

$$f(\sigma) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}e^{i\sigma x}dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-R}^{R}\frac{\sin ax}{x}\cos\sigma x dx + \underbrace{i\int_{-R}^{R}\frac{\sin ax}{x}\sin\sigma x dx]}_{odd\ \ func.\Rightarrow\int\ =0}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\frac{\sin ax}{x}\cos\sigma x dx = \left| \begin{array}{l} \sin\alpha\cdot\cos\beta = \\ = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(a+\sigma)x}{x}dx + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(a-\sigma)x}{x}dx$$

(א). אם $a+\sigma>0$ ו- $a-\sigma>0$ $\Leftarrow$ $-a\le\sigma\le a$ $\Leftarrow$ $|\sigma|\le a$

אזי נקבל:

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(\pi+\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(ב).אם $|\sigma|>a$, אזי $F(\sigma)=0$, כיוון שהאינטגרלים יהיו שווים לפלוס מינוס π, ומינוס פלוס π, וסכומם יהיה אפס.

לכן:

$$F(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\ , & |\sigma|<a \\ 0\ , & |\sigma|>a \end{cases}$$

לכן לפי (2.6), (ראה גם כן את (2.4)) נקבל:

$$J(a)=\frac{1}{2}\left\|\frac{\sin ax}{x}\right\|_2^2=\frac{1}{2}\|F(\sigma)\|_2^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma)|^2 d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2 d\sigma=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}2a=\boxed{\frac{a\pi}{2}}$$

תרגיל:

פתור משוואה אינטגראלית:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\sigma x}dx=2\pi e^{-|\sigma|}\ ,\ \varphi(x)=?$$

פתרון

נרשום את המשוואה אחרת:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\sigma x}dx=\sqrt{2\pi}e^{-|\sigma|}$$

באינטגרל האחרון נעשה החלפת משתנים $x=-t$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\sigma x}dx=\left|x=-t\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty}\varphi(-t)e^{i\sigma t}(-1)dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(-t)e^{i\sigma t}dt=\left|\varphi(-t):=f(t)\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\sigma t}dt=\sqrt{2\pi}e^{-|\sigma|}$$

לפי נוסחת ההפיכה נקבל:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)e^{-i\sigma t}d\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}e^{-|\sigma|}e^{-i\sigma t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{\sigma(1-it)}dt+\int_{0}^{\infty}e^{\sigma(1+it)}dt=$$

$$=\frac{1}{1-it}e^{\sigma(1-it)}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{1+it}e^{-\sigma(1+it)}\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{1-it}+\frac{1}{1+it}=\frac{2}{1+t^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\varphi(x)=f(-x)=\frac{2}{1+x^2}}$$