תרגול מס' 3 בחשבון אינפי' 2

הצבות אוילר.

עבור פונקציות מהצורה: $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ (פונקציה רציונלית עם מרכיבים הנ"ל).

- אם ax^2+bx+c **פריק,** כלומר: $ax^2+bx+c=(k_1x-\alpha)(k_2x-\beta)$,

אז נציב: $\sqrt{ax^2+bx+c}=(k_1x-\alpha)t$, (או לחילופין: $\sqrt{ax^2+bx+c}=(k_2x-\beta)t$) ונקבל:

$$(k_1x-\alpha)(k_2x-\beta)=(k_1x-\alpha)^2t^2 \Leftarrow k_2x-\beta=(k_1x-\alpha)t^2=k_1xt^2-\alpha t^2 \Leftarrow x=\frac{\alpha t^2-\beta}{k_1t^2-k_2}$$

ומכאן אפשר לייצג את dx כ- $R(t)dt$ (אחרי גזירה).

- אם ax^2+bx+c **אינו פריק,** כלומר: $\Delta=b^2-4ac<0$, זה אומר $\begin{cases}a>0\\c>0\end{cases}$ או $\begin{cases}a<0\\c<0\end{cases}$.

במקרה של $\begin{cases}a>0\\c>0\end{cases}$ נוכל לבחור באחת משתי ההצבות:

- בהינתן $a>0$ נציב: $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$ ונקבל:

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \Leftarrow x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}.$$

- בהינתן $c>0$, נציב: $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$ ונקבל:

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}xt+c \Leftarrow ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t \Leftarrow x=\frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}.$$

במקרה של $\begin{cases}a<0\\c<0\end{cases}$: מתוך $a<0$ רואים שהפרבולה עצובה, ואם גם נתון ש- $\Delta<0$, כלומר שאין לפרבולה חיתוך עם ציר ה- x , אז בהכרח $\forall x: ax^2+bx+c<0$ ולכן אין משמעות לביטוי $\sqrt{ax^2+bx+c}$, וממילא גם אין משמעות לאינטגרל (בפונקציות מרוכבות יש משמעות !).

הערה: שתי ההצבות האחרונות, בהינתן $a>0$ או $c>0$ עומדות בפני עצמן ואפשריות גם במקרה שבו ax^2+bx+c פריק.

דוגמאות:

1. $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$

נציב: $\sqrt{x^2+x-2}=(x-1)t \quad \rightarrow \quad x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

ונקבל: $x=\frac{t^2+2}{t^2-1} \quad \Leftarrow \quad dx=\frac{2t(t^2-1)-2t(t^2+2)}{(t^2-1)^2}dt=-6\frac{t}{(t^2-1)^2}dt$.

כמו כן: $(x-1)t=\left(\frac{t^2+2}{t^2-1}-1\right)t=t\cdot\frac{t^2+2-t^2+1}{t^2-1}=\frac{3t}{t^2-1}$

ומכאן: $I=\int \underbrace{\frac{t^2-1}{t^2+2}}_{1/x}\cdot\underbrace{\frac{t^2-1}{3t}}_{1/\sqrt{x^2+x-2}}\cdot\underbrace{\frac{-6t}{(t^2-1)^2}dt}_{dx}=-2\int\frac{dt}{t^2+2}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$

נחלץ את t: $t=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{(x-1)}=\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ ונקבל: $I=-\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-2}}\right)+C$.

---

2. $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$

נציב: $\sqrt{x^2+x+2}=x+t \quad \rightarrow \quad x^2+x+2=x^2+2xt+t^2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{t^2-2}{1-2t}$

ונקבל: $dx=\frac{2t(1-2t)+2(t^2-2)}{(1-2t)^2}dt=\frac{-2t^2+2t-4}{(1-2t)^2}dt=-2\frac{t^2-t+2}{(1-2t)^2}dt$

כמו כן: $\sqrt{x^2+x+2}=x+t=\frac{t^2-2}{1-2t}+t=\frac{t^2-2+t-2t^2}{1-2t}=-\frac{t^2-t+2}{1-2t}$

ומכאן: $I=\int\underbrace{\frac{1-2t}{t^2-2}}_{1/x}\cdot\underbrace{-\frac{1-2t}{t^2-t+2}}_{1/\sqrt{x^2+x+2}}\cdot\underbrace{-2\frac{t^2-t+2}{(1-2t)^2}dt}_{dx}=2\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}-x+\sqrt{2}}\right|+C$$

הצבה טריגונומטרית אוניברסאלית.

ההצבה: $t=\tan\frac{x}{2}$ **עבור פונקציות מהצורה:** $R(\sin x,\cos x,\tan x)$. מתוך ההצבה מתקבל:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2t\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2t}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\arctan t\ \rightarrow\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמאות:

1. $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\underbrace{\frac{1+t^2}{2t}}_{1/\sin x}\cdot\underbrace{\frac{2dt}{1+t^2}}_{dx}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

2. $$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int\underbrace{\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}}_{1/\sin x+\cos x}\cdot\underbrace{\frac{2dt}{1+t^2}}_{dx}=\int\frac{1+t^2}{-t^2+2t+1}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=-2\int\frac{dt}{t^2-2t-1}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left[\frac{1}{t-1-\sqrt{2}}-\frac{1}{t-1+\sqrt{2}}\right]dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1+\frac{2\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1+\frac{2\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C$$

האינטגרל המסוים של רימן ודרבו

תהא f פונקציה חסומה בקטע סגור $[a,b]$, ו- T חלוקה של הקטע. נסמן עבור חלוקה זו:

ונסמן: $\forall i:\ 1\le i\le n:\ m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},\quad M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i$ - **הסכום העליון של דרבו**, $\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i$ - **הסכום התחתון של דרבו**.

$\overline{I} = \inf_T \left\{ \overline{S}(T) \right\}$ - **האינטגרל העליון של דרבו**, $\underline{I} = \sup_T \left\{ \underline{S}(T) \right\}$ - **האינטגרל התחתון של דרבו**.

תוצאה: תמיד מתקיים: $\underline{I} \le I \le \overline{I}$. הפונקציה אינטגרבילית אם"ם: $\underline{I} = \overline{I} = I$.

משפט (תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות):

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם היא חסומה בקטע ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של $[a,b]$ עבורה מתקיים: $\left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$.

תרגיל: קבעו האם הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אינטגרבילית בקטע $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

פתרון: לא! הפונקציה אינה חסומה בסביבה של $x = 0$.

תרגיל: הוכח עפ"י ההגדרה כי: $f(x) = x$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ וחשב את $I = \int_0^1 xdx$.

פתרון:

נבחר $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>סדרת חלוקות</u> של הקטע $[0,1]$ כך שבכל T_n הקטע מחולק ל-n קטעים שווים באורכם:

$T_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\right\}$. זו סדרת חלוקות **נורמלית**, היינו ש: $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$.

ניעזר בה כדי למצוא לכל $\varepsilon > 0$ חלוקה T_n עבורה $\left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$.

$f(x) = x$ חסומה בקטע $[0,1]$, ומונוטונית עולה. לכן: $\forall i: \ M_i = \frac{i}{n}, \ m_i = \frac{i-1}{n}$.

נקבל: $\overline{S}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i}{n}}_{M_i} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$,

$\underline{S}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i-1}{n}}_{m_i} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-1 = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$.

כיוון ש: $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(T_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(T_n) = \frac{1}{2}$ תמיד נוכל למצוא T_n עבורה: $\left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$.

לכן: $f(x) = x$ אינטגרבילית בקטע ו- $I = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.