אלגברה לינארית 2 תרגול 7 צורת ז'ורדן

10 במאי 2021

1 הגדרות ומשפטים

- בלוק ז'ורדן מסדר k הוא מטריצה מהצורה:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

למשל:

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- בלוק ז'ורדן לא לכסין (עבור $k > 1$). ניתן לשים לב ש־ $\dim V_\lambda = 1 < k$, כי הדרגה של $\lambda I - A$ תמיד תהיה $k - 1$.

- מתקיים: $m_{J_k(\lambda)}(x) = P_{J_k(\lambda)}(x) = (x - \lambda)^k$.

- מטריצה בצורת ז'ורדן היא מטריצת בלוקים אלכסונית, כאשר כל בלוק הוא בלוק ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא צמודה למטריצת ז'ורדן אמ"ם פ"א מל"ל. במקרה זה מתקיים: מספר הפעמים שע"ע λ מופיע על האלכסון הראשי = ר"א של λ. מספר הבלוקים של ע"ע λ = ר"ג. גודל הבלוק המקסימלי של ע"ע λ = החזקה של $(x-\lambda)$ בפ"מ. איך נזכור: נסתכל בדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = 0$$

באופן כללי, עבור בלוק ז'ורדן $J_k(0)$ היא מטריצה נילפוטנטית מסדר k. כלומר $(J_k(0))^k = 0, \forall m < k : (J_k(0))^m \neq 0$

- צרות זורדן של A היא יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

2 תרגילים

1. מצאו צורת ז'ורדן של

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: נמלא את הטבלה הבאה תוך כדי פתרון:
נתחיל ממציאת פ"א:

$$P_A(x) = |xI - A| = \det \begin{pmatrix} x+2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי שורה ראשונה:

$$= (x+2)\cdot\det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} = (x+2)(x-1)\det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x+2)(x-1)\left(\underbrace{x(x-2)+1}_{(x-1)^2}\right) = (x+2)(x-1)^3$$

נמצא כעת ר"ג של ע"ע 1:

$$\dim N\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{3,4}+R_2\to R_{3,4}]{R_1-3R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\dim N(I-A) = 2$$

נקבל שזו צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

הסבר: פ"א אומר לנו לשים 2- פעם אחת על האלכסון, ו־1 3 פעמים. בנוסף, ר"ג של 1 אומר לנו שיש שני בלוקים. ליצור 2 בלוקים משלוש אחדות ניתן רק ע"י בלוק מגודל 2 ובלוק מגודל 1. מכאן גם נסיק שהחזקה של $(x-1)$ בפ"מ היא 2. הערה: אם היינו מחשבים תחילה את הפ"מ, היינו מגלים שהבלוק הגדול הוא בגודל 2, והיינו מסיקים שיש 2 בלוקים, ומוותרים על חישוב ר"ג.

2. תהי A מטריצה ממשית המקיימת:

$$P_A(x) = (x-2)^3(x-4)^4$$

$$m_A(x) = (x-2)^2(x-4)^2$$

מצאו צורות ז'ורדן אפשריות.

פתרון: נתחיל למלא את הטבלה:. ניעזר בטבלה ונתחיל לבנות צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & ? \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

חזקה בפ"מ מלמדת על גודל הבלוק המקסימלי. כיון שר"א של 2 הוא 3, נקבל שיש בלוק בגודל 2 ואחריו בלוק בגודל 1. לגבי ע"ע 4: הבלוק הגדול הוא בגודל 2, יש 4 פעמים 4 על האלכסון, לכן יש 2 אפשרויות מעבר למקסימלי: בלוק נוסף בגודל 2, או 2 בלוקים בגודל 1. בסה"כ יש 2 צורות אפשריות:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

הקיפו את המשפטים הנכונים:

(א) $\dim V_2 = 3$

(ב) $V_2 \oplus V_5 = \mathbb{R}^4$

(ג) $\dim V_2 + \dim V_5 = 3$

(ד) אף טענה אינה נכונה.

פתרון: נבדוק אחד אחד.

א – לא נכון. זו מטריצה מצורת ז'ורדן עם 2 בלוקים של ע"ע 2, ולכן ר"ג של ע"ע 2 = 2, ולא 3 (כאשר כזכור ר"ג זה $\dim V_2$).

ב – לא נכון. כאשר יש לנו סכום ישר נקבל: $\dim(V_2 \oplus V_5) = \dim V_2 +$

$\dim V_5 = 2+1 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

ג - נכון. כבר כתבנו בסעיף קודם.

מה פ"מ של המטריצה? $(x-2)^2(x-5)$.

4. תהי $A \in \mathbb{F}^{7\times 7}$ נלפוטנטית, המקיימת: $A^3 \neq 0, rank(A) = 5$. מהן צורות ז'ורדן אפשריות של A?

פתרון: כהרגלנו נמלא את הטבלה:

מטריצה נלפוטנטית מקיימת שיש k כך ש־ $A^k = 0$, לכן, כיון שפ"מ מחלק כל פולינום המאפס את A, נקבל שפ"מ הוא מהצורה x^t עבור $t \leq k$ (המינימלי שמאפס את A), כאן נקבל $t > 3$. מכאן, כיון שכל הגורמים של פ"א נמצאים בפ"מ, נקבל:

$$P_A(x) = x^7$$

האם אפשר לדעת ר"ג של 0? כן - $\dim V_0 = \dim N(A) = 7 - rank(A) = 7 - 5 = 2$, ולכן יש לנו במטריצה 2 בלוקים. מכאן שלא יכול להיות שהבלוק הגדול הוא בגודל 7, כי אז ז"א שיש רק בלוק אחד. לכן נקבל שהחזקה בפ"מ היא מבין האפשרויות: $\{4,5,6\} \in$. בסה"כ יש 3 אפשרויות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

5. באופן כללי, ר"ג = $\dim N(\lambda I - A) = \dim N(A - \lambda I)$
מכאן, אם אומרים לנו למשל $rank(A - \lambda I) = 4$ אז נקבל:

$$\dim V_\lambda = \dim N(A - \lambda I) = n - rank(A - \lambda I) = n - 4$$

3 שאלות מהקהל

1. בשיעורי הבית ראינו: אם λ ע"ע של A אז λ^k ע"ע של A^k. האם הכיוון ההפוך נכון? פתרון: מהעובדה שלא שאלנו כנראה שלא. צריך למצוא דוג' נגדית. האם אתם מכירים מטריצה שאין לה ע"ע, אך ל-A^2 יש?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אז -1 ע"ע של A^2, אבל מעל $\mathbb{R}$ אין ע"ע.

2. האם מעל $\mathbb{C}$ זה אמ"ם?
כמות שהוא, לא. כי למשל עבור $B = A^2$, נקבל $B^2 = I$, ואז 1^2 ע"ע של B^2 אבל 1 לא ע"ע של A. מאידך, מעל המרכובים כן ניתן לומר משהו: אם λ^k ע"ע של A^k, אז קיים שורש מסדר k של λ^k שהוא ע"ע של A.

3. מחפשים אלפות כך שאם

$$a_1(v_1 + v_2) + \cdots a_{n-1}(v_{n-1} + v_n) + a_n(v_n + \lambda v_1) = 0$$

אז

$$a_1 = \cdots = a_n = 0$$

אם נבדוק מה הסקלאר ליד כל וקטור נקבל:

$$(a_1 + a_n\lambda)v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)v_n$$

וכיון שהתחלנו מבסיס נקבל:

$$\begin{cases} a_1 + \lambda a_n = 0 \\ a_{i-1} + a_i = 0 \quad \forall i > 1 \end{cases}$$

כלומר, מחפשים מתי הפתרון היחיד למערכת הזו הוא הטריוויאלי. המערכת היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!