תרגיל 9 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. עבור המד"ר $(1-x)y''-2xy'-2y=0$ סביב הנקודה $x=-1$.

1.1. קבעו אם קיים למד"ר פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

פתרון: נסמן: $P(x)=1-x, Q(x)=-2x, R(x)=-2$ אז, $P(x),Q(x),R(x)$ אנליטיות בסביבת $x=-1$. בנוסף, $P(-1)=1-(-1)=2\neq 0$ לכן, $x=-1$ נקודה רגולרית. וקיים למד"ר פתרון מהצורה המתוארת.

1.2. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

פתרון: עבור פתרון מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n .$$

נגזור:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x+1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x+1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x+1)^{n-2}$$

נציב במד"ר:

$$(1-x)y''-2xy'-2y=0$$

$$(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = 0$$

$$(1-((x+1)-1))\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} - 2((x+1)-1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = 0$$

$$(2-(x+1))\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} - 2((x+1)-1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n(x+1)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2na_n(x+1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x+1)^n = 0$$

נחליף אינדקסים:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1)a_{k+2}(x+1)^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)ka_{k+1}(x+1)^k - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n(x+1)^n$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)a_{k+1}(x+1)^k - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x+1)^n = 0$$

ניתן להתחיל את כל האינדקסים מאפס.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}(x+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}(x+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n(x+1)^n$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}(x+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x+1)^n = 0$$

לכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} - 2na_n + 2(n+1)a_{n+1} - 2a_n\right](x+1)^n = 0$$

מתקיים שוויון אמ"ם, לכל $n \geq 0$,

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} - 2na_n + 2(n+1)a_{n+1} - 2a_n = 0$$

כלומר, לכל $n \geq 0$

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n+1)na_{n+1} + 2na_n - 2(n+1)a_{n+1} + 2a_n$$
$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1}(n-2) + 2a_n(n+1)$$
$$2(n+2)a_{n+2} = a_{n+1}(n-2) + 2a_n$$
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}(n-2) + 2a_n}{2(n+2)}$$

נציב, $k = n+2$ ($n = k-2 \Leftarrow$). אזי,

נוסחת הנסיגה היא: לכל $k \geq 2$

$$a_k = \frac{a_{k-1}(k-4) + 2a_{k-2}}{2k}$$

1.3 בהינתן $y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{1}{4}$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

פתרון:

$$a_0 = \frac{1}{2} \Leftarrow y(-1) = \frac{1}{2}$$
$$a_1 = \frac{1}{4} \Leftarrow y'(-1) = \frac{1}{4}$$

ע"י הצבת $k=2$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_2 = \frac{a_1(-2) + 2a_0}{2 \cdot 2} = \frac{\frac{1}{4}(-2) + 2 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

ע"י הצבת $k=3$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_3 = \frac{a_2(-1) + 2a_1}{2 \cdot 3} = \frac{-\frac{1}{8} + \frac{2}{4}}{6} = \frac{1}{16}$$

ע"י הצבת $k=4$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_4=\frac{a_3(0)+2a_2}{2\cdot 4}=\frac{\frac{1}{8}}{4}=\frac{1}{32}$$

ע"י הצבת $k=5$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_5=\frac{a_4(1)+2a_3}{2\cdot 5}=\frac{\frac{1}{32}+\frac{2}{16}}{10}=\frac{1}{64}$$

2. עבור כל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית.

2.1 $y''+\frac{\sin 2x}{x^2}y'+\frac{e^x}{x^2}y=0$

פתרון:

עלינו לבדוק אם הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית.

המד"ר הזו (כמעט) שקולה למד"ר $x^2y''+\sin 2xy'+e^xy=0$. עבורה $P(x)=x^2\,|_{x=0}=0$

נחשב את הגבולות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}e^x=1$$

הגבולות קיימים וסופיים ולכן $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ומובטח פתרון כנ"ל.

2.2 $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{e^x}{x^2}y=0$

פתרון:

עלינו לבדוק אם הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית.

נחשב את הגבולות:

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x\right)=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}e^x=1$$

הגבולות קיימים וסופיים ולכן $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ומובטח פתרון כנ"ל.

2.3 $y''+y'+\frac{\cos x}{x^3}y=0$

פתרון:

עלינו לבדוק אם הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית.

$$\lim_{x\to 0}(1\cdot x)=\lim_{x\to 0} x=0$$

נחשב את הגבולות:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^3}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}="\frac{1}{0}"$$

הגבול השני לא קיים (ובפרט, אינו גבול סופי), לכן, הנקודה $x=0$ אינה סינגולרית רגולרית ולא מובטח פתרון כנ"ל.

3. מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר $x^2y''+2(\sin x)y-3e^xy=0$ פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

פתרון:

ראשית נבדוק אם הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית.

$$P(x)=x^2 \Rightarrow P(0)=0$$

נחלק את המד"ר במקדם של y'' ונקבל:

$$y''+\frac{2(\sin x)}{x^2}y+\frac{-3e^x}{x^2}y=0$$

נסמן: $C(x)=\frac{2(\sin x)}{x^2}, D(x)=\frac{-3e^x}{x^2}$ ונחשב את הגבולות

$$c_0=\lim_{x\to 0}C(x)x=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$$
$$d_0=\lim_{x\to 0}D(x)x^2=\lim_{x\to 0}-3e^x=-3$$

מכיון שהגבולות קיימים וסופיים הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית ולמד"ר הנתונה קיים פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

נמצא את ערכי r המתאימים בעזרת המשוואה:

$$r(r-1)+c_0r+d_0=0$$
$$r(r-1)+2r-3=0$$
$$r^2-r+2r-3=0$$
$$r^2+r-3=0$$
$$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$r_{1,2}$ ממשיים וכן, $r_1-r_2=(\frac{-1+\sqrt{13}}{2})-(\frac{-1-\sqrt{13}}{2})=\sqrt{13}$ אינו מספר שלם,

לכן, $r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ הם ערכי r הדרושים.

4. עבור המד"ר $x^2y''+3(e^x-1)y'-5e^{2x}y=0$

4.1. קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית.

פתרון:
עלינו לבדוק אם הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית.
נשים לב: $x=0$ מאפסת את המקדם של y''.

נחלק את המד"ר במקדם של y'' ונקבל:

$$y''+\frac{3(e^x-1)}{x^2}y'+\frac{-5e^{2x}}{x^2}y=0$$

נסמן:

$$C(x)=\frac{3(e^x-1)}{x^2},D(x)=\frac{-5e^{2x}}{x^2}$$

נחשב את הגבולות:

$$c_0=\lim_{x\to 0}C(x)x=\lim_{x\to 0}\frac{3(e^x-1)}{x^2}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{3(e^x-1)}{x}\overset{l(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3e^x}{1}=3$$

$$d_0=\lim_{x\to 0}D(x)x^2=\lim_{x\to 0}\frac{-5e^{2x}}{x^2}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}(-5e^{2x})=-5$$

הגבולות קיימים וסופיים ולכן $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ומובטח פתרון כנ"ל.

4.2. מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר הנתונה פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

פתרון:
נשתמש במשוואה:

$$r(r-1)+c_0r+d_0=0$$

$$r(r-1)+3r-5=0$$

$$r^2-r+3r-5=0$$

$$r^2+2r-5=0$$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{6}}{2}=-1\pm\sqrt{6}$$

$r_{1,2}$ ממשיים וכן, $r_1-r_2=(-1+\sqrt{6})-(-1-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ אינו מספר שלם,
לכן, $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{6}$ הם ערכי r הדרושים.

5. עבור המד"ר $4xy''+2y'+y=0$.

5.1 קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

פתרון: נבדוק אם הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית.

$$P(x)=4x\Rightarrow P(0)=0$$

נחלק את המד"ר במקדם של y'' ונקבל:

$$y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0$$

נסמן: $C(x)=\frac{1}{2x},D(x)=\frac{1}{4x}$ ונחשב את הגבולות

$$c_0=\lim_{x\to 0}C(x)x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$d_0=\lim_{x\to 0}D(x)x^2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4x}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=0$$

מכיון שהגבולות קיימים וסופיים הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית ולמד"ר הנתונה קיים פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

5.2 מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

פתרון: נמצא את ערכי r המתאימים בעזרת המשוואה:

$$r(r-1)+c_0r+d_0=0$$

$$r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=0$$

$$r^2-r+\frac{1}{2}r=0$$

$$r^2-\frac{1}{2}r=0$$

$$r\left(r-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$r_1=0,r_2=\frac{1}{2}$$

$r_{1,2}$ ממשיים וכן, $r_1-r_2=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ אינו מספר שלם,

לכן, $r_1=0,r_2=\frac{1}{2}$ הם ערכי r הדרושים.

5.3 לכל אחד מערכי r הנ"ל, מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

פתרון: עלינו לפתח את

$$C(x)x = \frac{1}{2x}\cdot x = \frac{1}{2},$$

$$D(x)x^2 = \frac{1}{4x}\cdot x^2 = \frac{1}{4}x$$

לטורי חזוקת סביב אפס.
נשים לב, הם כבר מפותחים לטורי חזקות. אכן:

$$C(x)x = \frac{1}{2}x^0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots$$

$$D(x)x^2 = 0x^0 + \frac{1}{4}x + 0x^2 + 0x^3 +$$

המקדמים של טורי החזקות הם:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ 0 & n \ge 1 \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} \frac{1}{4} & n=1 \\ 0 & n \ne 1 \end{cases}$$

על מנת למצוא נוסחת נסיגה נשתמש בנוסחה:

$$\forall n \ge 1 \qquad F(r+n)a_n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k} + d_{n-k}\right]}_{(*)} = 0$$

כאשר:

$$F(r+n) = (r+n)(r+n-1) + c_0(r+n) + d_0$$

$$= (r+n)(r+n-1) + \frac{1}{2}(r+n) + 0$$

$$= (r+n)(r+n-1+\frac{1}{2})$$

$$= (r+n)(r+n-\frac{1}{2})$$

נחשב את הסכום $(*)$.
נבדוק מתי c_{n-k} או d_{n-k} שונים מאפס.
$k=n \Leftrightarrow n-k=0 \Leftrightarrow c_{n-k} \ne 0$.
לכן, לכל $0 \le k \le n-1$, $c_{n-k}=0$.
$k=n-1 \Leftrightarrow n-k=1 \Leftrightarrow d_{n-k} \ne 0$
לכן, עבור $0 \le k \le n-1$, רק עבור $k=n-1$ נקבל $d_{n-k} \ne 0$.
לכן, האיבר היחיד בסכום שלא מתאפס הוא האיבר המתקבל מהצבת $k=n-1$. לכן,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k} + d_{n-k}\right] = a_{n-1}\left[(r+n-1)c_{n-(n-1)} + d_{n-(n-1)}\right] = a_{n-1}\left[(r+n-1)c_1 + d_1\right] = a_{n-1}\left[0+\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}a_{n-1}$$

לכן, קיבלנו את המשוואה:

לכל $n \ge 1$,

$$F(r+n)a_n+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]}_{(*)}=0$$

$$(r+n)(r+n-\frac{1}{2})a_n+\frac{1}{4}a_{n-1}=0$$

$$(r+n)(r+n-\frac{1}{2})a_n=-\frac{1}{4}a_{n-1}$$

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{4(r+n)(r+n-\frac{1}{2})}$$

עבור: $r_1=0$ נקבל כי לכל $n\geq 1$

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{4(0+n)(0+n-\frac{1}{2})}=-\frac{a_{n-1}}{4n(n-\frac{1}{2})}=-\frac{a_{n-1}}{n(4n-2)}$$

לכן, נוסחת הנסיגה היא:

$$\forall n\geq 1 \qquad -\frac{a_{n-1}}{n(4n-2)}$$

עבור: $r_2=\frac{1}{2}$ נקבל כי לכל $n\geq 2$

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{4(\frac{1}{2}+n)(\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2})}=-\frac{a_{n-1}}{4(n+\frac{1}{2})n}=-\frac{a_{n-1}}{n(4n+2)}$$

לכן, נוסחת הנסיגה היא:

$$\forall n\geq 1 \qquad -\frac{a_{n-1}}{n(4n+2)}$$

6. עבור המד"ר $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{16}\right)y=0$.

6.1 קבעו אם מובטח קיום פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$ לפי המשפט על סינגולריות רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

פתרון: נבדוק אם הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית.

$$P(x)=x^2\Rightarrow P(0)=0$$

נחלק את המד"ר במקדם של y'' ונקבל:

$$y''+\frac{x}{x^2}y'+\frac{\left(x^2-\frac{1}{16}\right)}{x^2}y=0$$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{16x^2}\right)y=0$$

נסמן: $C(x)=\frac{1}{x}, D(x)=\left(1-\frac{1}{16x^2}\right)$ ונחשב את הגבולות

$$c_0=\lim_{x\to 0} C(x)x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0} 1=1$$

$$d_0=\lim_{x\to 0} D(x)x^2=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{16x^2}\right)\cdot x^2=\lim_{x\to 0}\left(x^2-\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{16}$$

מכיון שהגבולות קיימים וסופיים הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית ולמד"ר הנתונה קיים פתרון מהצורה $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

6.2 מצאו את ערכי r עבורם יש למד"ר פתרון מהסוג $x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_0\neq 0)$ עבור $0<x<\delta$.

פתרון: נמצא את ערכי r המתאימים בעזרת המשוואה:

$$r(r-1)+c_0r+d_0=0$$

$$r(r-1)+r-\frac{1}{16}=0$$

$$r^2-r+r-\frac{1}{16}=0$$

$$r^2-\frac{1}{16}=0$$

$$r^2=\frac{1}{16}$$

$$r_{1,2}=\pm\frac{1}{4}$$

$r_{1,2}$ ממשיים וכן, $r_1-r_2=\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$ אינו מספר שלם,

לכן, $r_{1,2}=\pm\frac{1}{4}$ הם ערכי r הדרושים.

6.3 לכל אחד מערכי r הנ"ל, מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

פתרון: עלינו לפתח את

$$C(x)x=\frac{1}{x}\cdot x=1,$$

$$D(x)x^2=\left(1-\frac{1}{16x^2}\right)\cdot x^2=-\frac{1}{16}+x^2$$

לטורי חזוקת סביב אפס.

נשים לב, הם כבר מפותחים לטורי חזקות. אכן:

$$C(x)x=1=1x^0+0x+0x^2+0x^3+\dots$$

$$D(x)x^2=-\frac{1}{16}x^0+0x+1x^2+0x^3+$$

המקדמים של טורי החזקות הם:

$$c_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \ge 1 \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} -\frac{1}{16} & n=0 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n \ne 0,2 \end{cases}$$

על מנת למצוא נוסחת נסיגה נשתמש בנוסחה:

$$\forall n \ge 1 \qquad F(r+n)a_n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k} + d_{n-k}\right]}_{(*)} = 0$$

כאשר:

$$F(r+n) = (r+n)(r+n-1) + c_0(r+n) + d_0$$
$$= (r+n)(r+n-1) + 1(r+n) - \frac{1}{16}$$
$$= (r+n)(r+n-1+1) - \frac{1}{16}$$
$$= (r+n)^2 - \frac{1}{16} = (r+n+\frac{1}{4})(r+n-\frac{1}{4})$$

נחשב את הסכום $(*)$.

נבדוק מתי c_{n-k} או d_{n-k} שונים מאפס.

$c_{n-k} \ne 0 \Leftrightarrow n-k=0 \Leftrightarrow k=n$.

לכן, לכל $0 \le k \le n-1$, $c_{n-k}=0$.

$d_{n-k} \ne 0 \Leftrightarrow n-k=0$ או $n-k=2 \Leftrightarrow k=n$ או $k=n-2$

לכן, עבור $0 \le k \le n-1$, רק עבור $k=n-2$ נקבל $d_{n-k} \ne 0$.

מכיוון שעבור $n=1$, $k=n-2=-1$ לא בתחום $0 \le k \le n-1$, נחשב את הסכום $(*)$ בנפרד עבור $n=1$ ועבור כל $n \ge 2$.

עבור $n=1$, לכל $0 \le k \le n-1$ הקבועים $c_{n-k}=0$ וכן $d_{n-k}=0$ לכן הסכום $(*)$ שווה אפס.

עבור $n \ge 2$, האיבר היחיד בסכום שלא מתאפס הוא האיבר המתקבל מהצבת $k=n-2$ (שקיים כי $n \ge 2$). לכן,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right] = a_{n-2}\left[(r+n-2)c_{n-(n-2)}+d_{n-(n-2)}\right] = a_{n-2}\left[(r+n-2)c_2+d_2\right] = a_{n-2}\left[0+1\right] = a_{n-2}$$

לכן, קיבלנו שתי משוואות:

עבור $n=1$,

$$F(r+n)a_n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]}_{(*)} = 0$$

$$(r+n+\frac{1}{4})(r+n-\frac{1}{4})a_n = 0 \xrightarrow{n=1}$$

$$a_n = 0 \xrightarrow{n=1}$$

$$a_1 = 0$$

עבור $n \ge 2$,

$$F(r+n)a_n+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[(r+k)c_{n-k}+d_{n-k}\right]}_{(*)}=0$$

$$(r+n+\frac{1}{4})(r+n-\frac{1}{4})a_n+a_{n-2}=0$$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(r+n+\frac{1}{4})(r+n-\frac{1}{4})}$$

עבור: $r_1=\frac{1}{4}$ נקבל כי לכל $n\geq 2$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(\frac{1}{4}+n+\frac{1}{4})(\frac{1}{4}+n-\frac{1}{4})}=-\frac{a_{n-2}}{n(n+\frac{1}{2})}$$

לכן, נוסחת הנסיגה היא:

$$\begin{cases} a_1=0 \\ \forall n>1 \qquad a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(n+\frac{1}{2})} \end{cases}$$

עבור: $r_1=-\frac{1}{4}$ נקבל כי לכל $n\geq 2$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(-\frac{1}{4}+n+\frac{1}{4})(-\frac{1}{4}+n-\frac{1}{4})}=-\frac{a_{n-2}}{n(n-\frac{1}{2})}$$

לכן, נוסחת הנסיגה היא:

$$\begin{cases} a_1=0 \\ \forall n>1 \qquad a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(n-\frac{1}{2})} \end{cases}$$

בהצלחה! ☺