בוחן בדידה

7.8.213 , א' אלול תשע"ג

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו כל תשובה בדף נפרד. על כל דף רשמו ת.ז. וראשי תיבות של שמכם.**
- משך הבוחן: שעה וחצי
- ללא חומר עזר
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

1. יהיו A, B, C קבוצות. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

   (א) $A \triangle B \subseteq B \iff P(A) \subseteq P(B)$ (13 נק')

   (ב) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ (12 נק')

2. הוכח/הפרך:

   (א) תהא $f : X \to Y$ פונקציה. יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ אוסף תתי קבוצות של X אזי $f\big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\big) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$ (12 נק')

   (ב) תהא $f : X \to Y$ פונקציה. A תת קבוצה של X אזי $f(A) = f(f^{-1}(f(A)))$ (13 נק')

3. יהי $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ יחס על הטבעיים המוגדר ע"י $xRy \Leftrightarrow 3|(x+2y)$

   (א) הוכח כי R יחס שקילות (15 נק')

   (ב) מצא את $\mathbb{N}/R$ -קבוצת המנה. (10 נק')

4.

   (א) כתוב את ההגדרות של המושגים הבאים: (8 נק')

      i. יחס סדר חלקי על קבוצה A

      ii. יחס סדר מלא על קבוצה A

      iii. איבר מקסימלי בהנתן יחס סדר חלקי על A

      iv. איבר מקסימום בהנתן יחס סדר חלקי על A

   (ב) יהא A קבוצה ו $R \subseteq A \times A$ יחס סדר מלא עליה.
   נגדיר O להיות קבוצת כל יחסי הסדר החלקיים על A, סדורה ע"י הכלה. (כלומר הזוג $(O, \subseteq)$)
   הוכח: R איבר מקסימלי ב O. (17 נק')

בהצלחה!

פתרון:

.1

(א) (⇐)נתון $A\triangle B\subseteq B$ צ"ל $P(A)\subseteq P(B)$
תהא $D\in P(A)$ כלומר $D\subseteq A$ צריך להוכיח כי $D\in P(B)$ כלומר $D\subseteq B$
נניח בשלילה כי D לא מוכל ב B אזי קיים $(x\in D)\wedge(x\notin B)$ ולכן $x\in D\setminus B\subseteq A\setminus B\subseteq A\triangle B\subseteq B$ כלומר $x\in B$. סתירה.
(⇒)נתון $P(A)\subseteq P(B)$ צ"ל $A\triangle B\subseteq B$
יהא $x\in A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ צ"ל $x\in B$
מהנתון נובע כי $x\in B\setminus A$ (בפרט $x\in B$ וסימנו) או $x\in A\setminus B$.
ואז $\{x\}\in P(A)\subseteq P(B)$ בפרט $\{x\}\in P(B)$ כלומר $\{x\}\subseteq B$ (כלומר $x\in B$)
הערה: ניתן במקום הפתרון שהוצע להראות ששני הצדדים שקולים לכך ש $A\subseteq B$

(ב) הפרכה. ניקח $A=\emptyset, B=C=\{1\}$
ואז $A\triangle(B\triangle C)=B\triangle C=B\triangle B=\emptyset$
אבל $(A\triangle B)\cap(A\triangle C)=B\cap C=B\cap B=\{1\}$

.2

(א) נכון.
($\subseteq$) יהיה $f(x)\in f\big(\bigcup_{i\in I}A_i\big)$ כאשר $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אז קיים i כך ש $x\in A_i$ ולכן $f(x)\in f(A_i)$ ולכן $f(x)\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)$
($\supseteq$) יהיה $y\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ אזי קיים i כך ש $y\in f(A_i)$ ולכן קיים $x\in A_i\subset\bigcup_{i\in I}A_i$ כך ש $f(x)=y$ ולכן $y=f(x)\in f\big(\bigcup_{i\in I}A_i\big)$

(ב) נכון. לכל B מתקיים $B\supseteq f(f^{-1}(B))$ בפרט עבור $B=f(A)$ ולכן $f(A)\supseteq f(f^{-1}(f(A)))$
מצד שני מתקיים $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ נפעיל את f על שני האגפים ונקבל $f(A)\subseteq f(f^{-1}(f(A)))$

.3

(א) רפלקסיבי $3|x+2x=3x$
סימטרי־ אם $3|x+2y$ אזי $x+2y=3n$ עבור n שלם כלשהו ואז $-2x-y=x+2y-(3x+3y)=3(n-x-y)$ ולכן $3|y+2x$
טרנזיטיבי־ אם $3|x+2y, 3|y+2z$ אזי $x+2y=3n,\ y+2z=3m$ עבור n, m שלמים כלשהם ואז $x+2z=3m+3n-3y$ ולכן $3|x+2z$

(ב) $\mathbb{N}/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$ כל השאריות מודולו 3 .

דרך נוספת היא פשוט לראות כי $3|x+2y \iff 3|x-y$ וכבר ראינו כי היחס המוגדר ע"י $3|x-y$ הוא יחס שקילות של מודולו 3.

.4

(א) בהרצאה/תירגול

(ב) יהי $S\in O$ יחס סדר חלקי על A המקיים $R\subseteq S$ צ"ל $R=S$
נניח בשלילה כי R מוכל ממש ב S אזי קיים $(a,b)\in S\wedge(a,b)\notin R$. כיוון ש R יחס מלא אזי מתקיים $(b,a)\in R$
כיוון ש $R\subseteq S$ נובע כי $(b,a)\in S$ מכיוון ש S יחס סדר חלקי (בפרט אנטי סימטרי) אזי $a=b$ (כי גם $(a,b)\in S$)
אזי קיבלנו כי $(a,a)=(a,b)\notin R$ סתירה לכך ש R יחס סדר מלא (בפרט רפלקסיבי)