1.11.15

תורת הקבוצות
תרגול 2

הגדרה: קבוצה A תיקרא $\in$-טרנזיטיבית, אם
לכל $x\in A$ ולכל $y\in x$ מתקיים $y\in A$.

דוגמאות: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

תרגיל: הראו שקולים:
1. A טרנזיטיבית.
2. $A\subseteq P(A)$.

פתרון: (1⇒2) יהיה $x\in A$ נראה ש- $x\in P(A)$ כלומר $x\subseteq A$.
אבל לכל $y\in x$ מתקיים מטרנזיטיביות $y\in A$.
לכן $x\subseteq A \Rightarrow x\in P(A)$.

(2⇒1) $A\subseteq P(A)$ נראה לכל $x\in A$ ולכל $y\in x \Rightarrow y\in A$
יהיו $x\in A$, $y\in x$.
מהנתון $x\in P(A)$ לכן $x\subseteq A$. לכן בפרט $y\in A$.
מש"ל!

הגדרה: סודר. קבוצה A תיקרא סודר
אם היא 1. $\in$-טרנזיטיבית.
2. סדורה היטב ע"י $\in$.
[כלומר $x<y \iff x\in y$].

תרגיל: הוכיחו שלכל סודר $\alpha=\{\beta \mid \underset{\text{סודרים}}{\beta}<\alpha\}$.

הוכחה: מההגדרה $\alpha=\{\beta\mid\beta\in\alpha\}$. ☺

תרגיל: הוכיחו שלכל סודר $\alpha\neq\emptyset$. $\emptyset\in\alpha$.

פתרון: יהי $\alpha\neq\emptyset$ סודר. קיים $x\in\alpha$. אם $x=\emptyset$ סיימנו.
אחרת $x\neq\emptyset$. אז קיים $y\in x$. α סודר ולכן $y\in\alpha$.
אם $y=\emptyset$ סיימנו. אחרת קיים $z\in y$, ולכן $z\in\alpha$ וכו'..
קיבלנו סדרה אינסופית יורדת. וזו בסתירה לכך ש- α סדור היטב.

עד שקיבלנו קבוצה ריקה
בסוף בהכרח

הגדרה: "רישא" של סודר α היא קבוצה $A\subseteq\alpha$

שמקיימת: $x\in A$, אם $y<x$ אז $y\in A$.

למשל A היא רישא של סודר α אם היא עצמה טרנזיטיבית.

הערה: כל איבר של סודר הוא בעצמו סודר.

והוכחנו בהרצאה שקבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.

מסקנה: כל רישא של סודר היא סודר.

סימון: לכל $x\in\alpha$ אפשר להסתכל על $seg(x)=\{y\in\alpha / y<x\}$
[segment]

נוכיח שההגדרות שקולות:

צ.ל: אם $y\in seg(x)$ וגם $z<y$ אז $z\in seg(x)$

מטרנזיטיביות היחס $z<x$ ולכן $z\in seg(x)$.

טענה: כל רישא אמיתית [כלומר מוכלת ממש בסודר]

היא מהצורה $seg(x)$ עבור $x\in A$ כלשהו.

הוכחה: תהיה $A\subset\alpha$ רישא של α. נסתכל על $\alpha\setminus A\neq\emptyset$.

נבחר את האיבר הראשון $x\in\alpha\setminus A$. נראה $A=seg(x)$

$(\supseteq)$ יהיה $y\in seg(x)$ לכן $y<x$.

אבל x הראשון! לכן $y\in A$.

$(\subseteq)$ יהיה $y\in A$, α סדורה קווית [כל סודר קווי]

לכן ניתן להשוות בין כל שני איברים.

אם $y<x$ אז סיימנו. נניח בשלילה שזה לא קורה:

לכן (I) $y=x$ אבל $x\notin A$, $y\in A$ בסתירה.

לכן (II) $x<y$. אבל כיוון ש-A טרנזיטיבית

אז $x\in A$ וזו שוב סתירה.

ולכן בהכרח $y<x$. מ.ש.ל!

תרגיל: תראה שאם x,y סודרים: ~~$x<y$~~ $y<x$
אז y הראשון ב- $x\cap y$.

הוכחה: $x>y$ ולכן $y\in x$, x סודר ולכן $y \subsetneq x$
נשים לב ש- y בעצמו סודר, בפרט טרנזיטיבי
ולכן הוא רישא של x.
הראנו שכל רישא היא מהצורה $seg(z)$.
נרצה להראות $z=y$.
אז $x\cap y = seg(y) = \{z\in x: z<y\} = \{z\in x: z\in y\}$.
ולמעשה $y=seg(y)$ כי $y\subsetneq x$.
בתרגיל הקודם הראנו שכל רישא נקבעת ע"י האיבר
הראשון במשלים לה. $y=seg(y)$. לכן y הראשון במשלים!
מ.ש.ל!

הגדרה: סופרימום ($supA$) של קבוצה A,
הוא הסודר שגדול או שווה מכל אברי הקבוצה.

טענה: תהיה F קבוצת סודרים. אז $supF=\cup F$.
הוכחה: ידוע שאיחוד של סודרים הוא אכן סודר.
צריך להוכיח ש- $\cup F$ גדול מכל איברי F. והוא
הראשון שמקיים את זה.

(I) יהיה $x\in F$. צ.ל $x\in\cup F$ ~~או~~
$x\in F \Rightarrow x\subseteq\cup F$ x סודר שמוכל בסודר אחר
ולכן שייך אליו. לכן $x\in\cup F$.

(II) יהיה $\alpha<\cup F$, צריך להראות ש- α לא יותר
גדול מאיברי F. $\alpha\in\cup F$. לכן קיים
$x\in F$ כך ש- $\alpha\in x$.
לכן הוא לא גדול מכל האיברים!
מ.ש.ל!

הגדרה: יהי α סודר. נגדיר $S(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$ הסודר העוקב של α.

הוכחנו ש- $S(\alpha)$ סודר.

כמו כן $S(\alpha)$ הראשון שגדול מ- α.

הגדרה: סודר α נקרא עוקב אם יש β כך ש- $\alpha=\beta+1=S(\beta)$

אחרת α סודר גבולי.

תרגיל: הוכיחו ש- α גבולי $\Longleftrightarrow$ לכל $\beta<\alpha$ גם $S(\beta)<\alpha$.

פתרון: $(\Leftarrow)$ נניח α גבולי.

אם $\alpha=\emptyset$ הטענה נכונה באופן ריק.

אחרת $\alpha\neq\emptyset$, יהיה $\beta<\alpha$,

נסתכל על $S(\beta)$. ניתן להשוות בין α ל- $S(\beta)$

אם $\alpha=S(\beta)$ אז α עוקב בסתירה.

אם $\alpha<S(\beta)$ אז $\beta<\alpha<S(\beta)$. אבל

$S(\beta)$ הסודר הראשון כך ש- β קטן ממנו.

ולכן בהכרח $S(\beta)<\alpha$.

$(\Rightarrow)$ נניח בשלילה ש- α לא גבולי. כלומר α עוקב.

לכן קיים β כך ש- $\beta+1=\alpha$.

מתקיים $\beta<\alpha$ אבל $S(\beta)\nless\alpha$, בסתירה.

מ.ש.ל!

תרגיל: הוכח לכל סודר α, $\sup\alpha\le\alpha$

אם יש איבר ב- α אחרון, β, אז $\sup\alpha=\beta$,

אחרת $\sup\alpha=\alpha$.

פתרון: (I) $\sup\alpha\le\alpha$.

ניזכר ש- $\sup\alpha=\bigcup\alpha$. נראה ש- $\bigcup\alpha\subseteq\alpha$.

אם $\bigcup\alpha=\alpha$ סיימנו, אם $\bigcup\alpha\subsetneq\alpha$ אז

בגלל שהוא סודר נקבל $\bigcup\alpha\in\alpha$, סה"כ $\sup\alpha\le\alpha$.

נותר להראות שאכן $\bigcup\alpha\subseteq\alpha$.

יהיה $x\in\alpha$. קיים $y\in\alpha$ כך ש- $x\in y$

אבל α טרנזיטיבי, לכן $x\in\alpha$. סה"כ $\bigcup\alpha\subseteq\alpha$.

(II) שוב יש איבר אחרון ב-α, β.

נראה $\bigcup\alpha=\beta$,

תחילה $\beta\subseteq\bigcup\alpha$. יהיה $x\in\beta$. אבל

מהגדרה של $\bigcup\alpha$, $x\in\bigcup\alpha$. כי $\beta\in\alpha$.

עכשיו $\bigcup\alpha\subseteq\beta$. יהיה $x\in\bigcup\alpha$.

לכן קיים $y\in\alpha$ כך ש- $x\in y$ לכן $x\in\alpha$.

נשווה בין y ל- β. בגלל ש- β הוא האיבר האחרון

$y\leq\beta$. $x<y \Rightarrow x<\beta$ לכן $x\in\beta$.

מ.ש.ל!

(III) נשאר להראות. אם אין איבר אחרון ב-α.

אז $\bigcup\alpha=\alpha$. הראינו כבר $\bigcup\alpha\subseteq\alpha$.

נראה $\alpha\subseteq\bigcup\alpha$. יהיה $x\in\alpha$, אין ב-α אחרון.

לכן x אינו אחרון, לכן קיים $y\in\alpha$ כך ש- $x\in y$.

ומהגדרה $x\in\bigcup\alpha$.

תרגיל! התנאים שקולים:

1. α עוקב. 2. אם $\beta=\sup(\alpha)$ אז $\alpha=S(\beta)$.

3. יש ב-α איבר אחרון.

פתרון: $(1 \Leftarrow 2)$ ברור.

$(3 \Leftarrow 1)$ α עוקב, לכן $\alpha=S(\beta)$ עבור β כלשהו.

נראה ש- β אחרון ב-α.

צ.ל לכל $x\in\alpha$, $x\leq\beta$.

כלומר צריך להראות $x<\beta+1 \Rightarrow x\leq\beta$ זה הגדרה

של עוקב!

$(2 \Leftarrow 3)$ נניח יש ב-α איבר אחרון.

נסמן אותו ב-β. מהתרגיל הקודם. $\beta=\sup(\alpha)$

והראינו שבמקרה ש-α הוא העוקב של האיבר האחרון שלו

כלומר $\alpha=S(\beta)$.

<u>תרגיל:</u> הבאים שקולים:

<u>1</u> α גבולי. <u>2</u> $\alpha=\sup\alpha$

<u>3</u> אם $A\subseteq\alpha$ אשלית.., אז $\alpha=\bigcup A$.

<u>הוכחה:</u> $(\underline{1} \Leftrightarrow \underline{2})$ הבאנו. כבר ש-α גבולי

$\Leftrightarrow$ אין בו איבר אחרון.

$\Leftrightarrow$ $\alpha=\sup\alpha$

$(\underline{2} \Leftarrow \underline{3})$

$A\subseteq\alpha$ ולכן $\bigcup A\subseteq\bigcup\alpha$ האם $\bigcup\alpha\subseteq\alpha$.

אבל מכיוון $\bigcup A=\alpha\subseteq\bigcup\alpha\subseteq\alpha$ לכן $\bigcup\alpha=\sup\alpha=\alpha$

$(\underline{3} \Leftarrow \underline{1})$ יהיה $x\in A$, α גבולי

כלומר <u>אין</u> איבר אחרון אז יש $x<y\in\alpha$

משלית A קיים $z\in A$, $y\leq z$

לכן $x\in z$ אז $x\in\bigcup A$.

<u>מ.ש.ל!</u>