פתרון תרגיל בית 13 – טופולוגיה

שאלה 1

א. יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y, g:Y\to X$ רציפות ומתקיים $f\circ g=id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

ב. תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

פתרון

א. עלינו להוכיח שני תנאים:

1. f על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.

2. $Y \subseteq U$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. כיוון $\Leftarrow$ ברור מרציפותה של f.
נוכיח את הכיוון השני. תהי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X. בשל רציפות g, $g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ פתוחה ב- Y. מאידך $(f\circ g)^{-1}(U)=Id^{-1}(U)=U$. והוכחנו הדרוש.

ב. $\Leftarrow$ מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.

$\Rightarrow$ מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש- f היא העתקת מנה, חח"ע נתונה). תהי $V\subseteq X$ פתוחה. $V=f^{-1}\left(f(V)\right)$ (שימו לב שהשוויון מתקיים מכיוון ש- f חח"ע), מכיוון ש- $V=f^{-1}\left(f(V)\right)$ פתוחה ב- X נקבל ע"פי הגדרת העתקת מנה ש- $f(V)$ פתוחה ב- Y.

מש"ל

שאלה 2

א. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל - $\hat{f}$ מ- $\mathbb{R}$ ל - $\mathbb{R}^2/\sim$.

ב. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=x_2^{\,2}+y_2^{\,2}$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

<u>פתרון</u>

א. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על-ידי $f(x,y)=x+y^2$. מתקיים

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$,

לכן $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\;\to\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $\hat{f}\left[(x,y)\right]=f(x,y)$ היא חח"ע; ומכיוון ש- f רציפה כך גם $\hat{f}$.

נראה ש- $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה:

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\sim$ מוגדרת על-ידי $g(x)=\left[(x,0)\right]$ אזי $g=\rho\circ h$ באשר

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ h(x)=(x,0)$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות (שימו לב ש- h רציפה כפונקציה לתוך מרחב מכפלה, אשר רציפה רכיב רכיב. בנוסף, שימו לב שהטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}^2$ מתלכדת עם טופולוגיית המכפלה).

נותר להוכיח כי $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$.

$g\circ\hat{f}\left[(x,y)\right]=g(x+y^2)=\left[\left(x+y^2,0\right)\right]=\left[(x,y)\right]$ לכן ההרכבה $g\circ\hat{f}$ היא הזהות ($id_{\mathbb{R}^2/\sim}$). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם היא את פונקציית הזהות ($id_{\mathbb{R}}$).

מכאן $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה וקיבלנו בסה"כ ש- $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

ב. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ על-ידי $f(x,y)=x^2+y^2$. (שימו לב ש- f על $[0,\infty)$).

בדיוק כמו בסעיף א' מסיקים ש- $\hat{f}$ חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2/\sim$ על-ידי $g(x)=\left[\left(\sqrt{x},0\right)\right]$ בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש- $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו את פונקציות

זהות). כעת מספיק להוכיח ש- g רציפה. ואמנם $g=\rho\circ t\circ r$ באשר

$\begin{cases} r:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ r(x)=\sqrt{x} \\ t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t(x)=(x,0) \end{cases}$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ

ש- $[0,\infty)\cong \mathbb{R}^2/\sim$.

מש"ל

שאלה 3

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא:

$x\sim y \Leftrightarrow (x=-y)\vee(x=y)$. הראו ש- X הומיאומורפי ל- $[0,\infty)$.

פתרון

המועמד הטבעי $f(x)=|x|$.

מתקיים $x\sim y \Leftrightarrow (x=y)\vee(x=-y)\Leftrightarrow |x|=|y| \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ ולכן $\hat{f}$ חח"ע.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f=\hat{f}\circ\rho} & [0,\infty) \\ \rho\searrow & & \nearrow\hat{f} \\ & \mathbb{R}/\sim & \end{array}$$

f רציפה ולכן $\hat{f}$ רציפה.

נמצא את הפונקציה ההופכית של $\hat{f}$. נגדיר: $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}/\sim$ על-ידי: $g(x)=[x]$.

לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים: $\hat{f}\circ g(x)=\hat{f}([x])=f(x)=|x|\underset{x\geq 0}{=}x$.

מצד שני, לכל $[x]\in\mathbb{R}/\sim$ מתקיים $g\circ\hat{f}([x])=g(f(x))=g(|x|)=[|x|]\underset{x\sim|x|}{=}[x]$.

לכן g היא הפונקיצה ההופכית של $\hat{f}$. קל לראות ש- $g=\rho|_{[0,\infty)}$ ומכיון ש- ρ רציפה אז גם g.

בסה"כ $\hat{f}$ רציפה, הפיכה ו- $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה ולכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

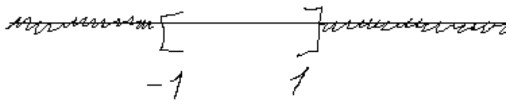
<u>דרך אחרת</u>: ניתן להראות ש- f היא העתקה פתוחה (תמונה של קטע פתוח היא קבוצה פתוחה) ולכן מנה (שכן היא רציפה ועל) ולכן $\hat{f}$ מנה (שכן היא חח"ע).

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות $x\in\mathbb{R}$ כך ש $|x|\geq 1$. בלשון אחרת, X הוא מרחב המנה $\mathbb{R}/\sim$ כאשר $\sim$ הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא: $x\sim y$ אם ורק אם $x=y$ או $|x|\geq 1$ וגם $|y|\geq 1$. הראו ש- X הומיאומורפי ל-

$S^1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.



<u>פתרון</u>

תזכורת: הקטע $\left[0,1\right]$ כשמזהים בו את הנקודות $0,1$ הומיאומורפי ל- S^1.

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to S^1$ המכבדת את יחס השקילות.

כל הנקודות מחוץ ל- $(-1,1)$ עוברות לאותה נקודה במנה, ולכן נעתיק את $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,\infty\right)$ לאותה נקודה אליה נשלחות $-1,1$.

אנחנו יודעים איך להעתיק את $\left[0,1\right]$ ל- S^1 ולכן נעתיק את $\left[-1,1\right]$ ל-$\left[0,1\right]$ הומיאומורפית על-ידי הפונקציה הטבעית $h:[-1,1]\to[0,1]$ המוגדרת על-ידי

$h(x)=\frac{x+1}{2}$ (שימו לב ש-$h(-1)=0\,;\,h(1)=1$). לאחר מכן נרכיב אותה עם הפונקציה הידועה $g:[0,1]\to S^1$ המוגדרת על-ידי $g(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$ (שימו לב שהנקודות $0,1\in[0,1]$ עוברות תחת g לנקודה $(1,0)\in S^1$). לכן, $g(h(1))=g(h(-1))=(1,0)\in S^1$.

כעת $f:\mathbb{R}\to S^1$ מוגדרת באופן הבא:

$$f(x):=\begin{cases} g(h(x)) & |x|\le 1 \\ (1,0) & |x|\ge 1 \end{cases}.$$

<u>תת-טענה</u>: f רציפה.

<u>תת-הוכחה</u>: נשתמש במשפט שראינו בכיתה: X,Y מ"ט, ויהי $C_1,\dots,C_n$ כיסוי סגור של X, כלומר C_i סגורה עבור $1\le i\le n$, ומתקיים $X=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$. אם $f:X\to Y$ פונקציה כך ש-$f|_{C_i}$ רציפה לכל $1\le i\le n$, אזי f רציפה.

במקרה שלנו, מתקיים $\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}:|x|\ge 1\}\cup\{x\in\mathbb{R}:|x|\le 1\}$ וכן $\{x\in\mathbb{R}:|x|\le 1\}=[-1,1]\ ;\ \{x\in\mathbb{R}:|x|\ge 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ ומכאן הן סגורות המקיימות את תנאי המשפט, ולכן f רציפה.

מש"ל תת-טענה.

<u>סיכום ביניים:</u>

- $f:\mathbb{R}\to S^1$ רציפה ועל;
- מתקיים $x\sim y$ אם ורק אם $f(x)=f(y)$

ולכן $\hat{f}:\mathbb{R}/_\sim\to S^1$ חח"ע;

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & S^1 \\ & \mathbb{R}/_\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- f רציפה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ רציפה;
- f על $\Leftarrow$ $\hat{f}$ על.

נוכיח כעת ש- $\mathbb{R}/_{\sim}$ הוא מרחב קומפקטי: נשים לב שצמצום העתקת המנה $\rho|_{[-1,1]}:[-1,1]\to\mathbb{R}/_{\sim}$ היא העתקה רציפה ו**על** ממרחב קומפקטי, ולכן גם התמונה $\mathbb{R}/_{\sim}$ היא מרחב קומפקטי.

כעת $\hat{f}$ רציפה מקומפקטי להאוסדורף, ולכן היא העתקה סגורה.

כלומר $\hat{f}$ רציפה, סגורה, חח"ע ו**על**, ולכן היא הומיאומורפיזם.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

מוטיבציה: נראה דוגמה למרחב מטריזבילי שמרחב המנה שלו אינו מטריזבילי.

נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב $X=\{0,1\}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\varnothing,X,\{0\}\}$.

א. הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.

ב. יהי $I=[0,1]$ ותהי $f:I\to\{0,1\}$ מוגדרת על-ידי $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 1 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

נגדיר יחס שקילות על I באופן הבא: $a\sim b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$ הוכיחו כי $I/_{\sim}$ הומיאמורפי למרחב שרפינסקי.

ג. הסיקו שהעתקת מנה אינה שומרת על מטריזביליות.

<u>פתרון</u>

א. כל מרחב מטרי הינו האוסדורף; עם זאת מרחב שרפינסקי אינו האוסדורף שכן לא ניתן להפריד את $\{0\}$ מ- $\{1\}$.

ב. נתבונן בתרשים הבא:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & \{0,1\} \\ \rho \searrow & & \nearrow \hat{f} \\ & I/\sim & \end{array}$$

נשים לב כי $\hat{f}$ חח"ע. כעת, נראה ש- f מנה ולכן גם $\hat{f}$ תהיה מנה (ולכן, מכיוון שהיא חח"ע, היא תהיה הומיאומורפיזם).

תהי $U \subseteq \{0,1\}$. נניח ש- $f^{-1}(U)$ פתוחה ונראה ש- U פתוחה. מספיק להראות ש- $U \neq \{1\}$. נניח בשלילה כי $U = \{1\}$, אזי $f^{-1}(U) = f^{-1}(\{1\}) = \left[\frac{1}{2},1\right]$ וזאת סתירה שכן $\left[\frac{1}{2},1\right]$ אינה פתוחה ב- I.

לכן $U \in \tau$.

שימו לב שהכיוון השני מתקיים, שכן f רציפה (בדקו!).

מכאן f מנה ולכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

ג. I מטריזבילי, ואילו $I/\sim$ אינו מטריזבילי (עיינו בסעיף א').

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

<u>פתרון</u>

הפונקציה f משאלה 5 היא מנה. נראה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

אינה פתוחה: $\left(\frac{3}{4},1\right]$ פתוחה ב- I וגם $f\left(\left(\frac{3}{4},1\right]\right) = \{1\} \notin \tau$.

אינה סגורה: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ סגורה ב- I וגם $\{0\}=f\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)$ אינה סגורה ב- (X,τ).

מש"ל