פתרון תרגיל בית 9 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

נתבונן בשלושה תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$
$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$
$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש-Z אינו הומיאומורפי ל-X. האם Y הומיאומורפי ל-X או ל-Z?
הוכיחו את תשובתכם!

<u>פתרון</u>

עשינו הוכחות מלאות כאלה בכיתה ולכן כאן נרשום רק את הרעיון. הרעיון הוא שב-X וב-Z, הוצאת **כל** נקודה לא פוגעת בקשירותו של המרחב. עם זאת ב-Y, ישנה נקודה **אחת** שהוצאתה פוגעת בקשירות (נקודת ההשקה).

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומאומורפי ל-$\mathbb{R}^n$ עבור $n>1$.

<u>פתרון</u>

נראה כי לכל $n>1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל-$\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ-$\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}\setminus\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$. לעומת זאת לכל $n>1$, אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n-\{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n>1$ ולכל $a\in\mathbb{R}^n$. נניח $x,y\in\mathbb{R}^n-\{a\}$ אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך a אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו-y גם ב-$\mathbb{R}^n-\{a\}$.

אחרת, מכיוון ש$n>1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר x-ו y) שעובר דרך x. ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ x ונסמנה z. ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין x-ו z

(a לא נמצאת על ישר זה). כמו כן , a לא נמצאת על הישר המחבר בין z ו- y ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין y ל- z. אם יש מסילה ב $\mathbb{R}^n-\{a\}$ בין x ל y וכן מסילה בין y ל z אז יש גם מסילה בין x ל- z (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאו' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז גם $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{a\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(a)\}$ היה הומיאו'. אבל כפי שתיארנו המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

<u>תרגיל (ממבחן)</u>

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב $\mathbb{R}$ ו $A\neq\mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

<u>פתרון</u>

נניח $z\in\mathbb{R}\setminus A$ נקודה במשלים.

נסמן $A_1:=(-\infty,z)\cap A,\quad A_2:=(z,\infty)\cap A$.

בודקים ש $A=A_1\cup A_2$ פירוק טופולוגי של A.

נימוק: ברור $A_1\cap A_2=\varnothing$ (כי $(-\infty,z)\cap(z,\infty)=\varnothing$).

$A_1:=(-\infty,z)\cap A, A_2:=(z,\infty)\cap A$ קבוצות פתוחות ב A ע"פ הגדרת טופולוגית תת מרחב.

$A_1:=(-\infty,z)\cap A\neq\varnothing,\quad A_2:=(z,\infty)\cap A\neq\varnothing$ כי A צפוף ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

שאלה 4

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.

ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X,τ), המכיל בסיס B_2 ל-τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל-τ.

ג. יהיו τ_1,τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל-(X,τ_1). אזי: $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

פתרון

א. בתור בסיס ניתן לקחת את הטופולוגיה עצמה (קל לראות שהתכונות הדרושות עבור בסיס מתקיימות באופן טריוויאלי).

ב. B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן נותר לבדוק את התנאי השני. תהי $O \in \tau$ ותהי $x \in O$. נרצה למצוא $U \in B_1$ כך ש-$x \in U \subseteq O$. B_2 בסיס ולכן קיימת $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq O$. מכיוון ש-$B_2 \subseteq B_1$ נקבל ש-$U \in B_1$ וקיבלנו את הדרוש.

ג. אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אזי ברור ש-$B_1 \subseteq \tau_2$ (כי $B_1 \subseteq \tau_1$ כבסיס ל-(X,τ_1)). בכיוון השני: תהי $O \in \tau_1$. קיימת משפחה של אינדקסים I ומשפחה של קבוצות $\{U_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $i \in I$ $U_i \in B_1$ ומתקיים $O = \bigcup_{i\in I} U_i$ (מהגדרת בסיס). נתון כי $B_1 \subseteq \tau_2$ ולכן לכל $i \in I$ $U_i \in \tau_2$.
אך τ_2 היא טופולוגיה ולכן $O = \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_2$

מש"ל

שאלה 5

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F \subseteq X, G \subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F \times G$ סגורה ב-$X \times Y$.

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

פתרון

א. נראה שהמשלים של $F \times G$ הינה קבוצה פתוחה.
$(F\times G)^C = \big((X\setminus F)\times Y\big)\cup\big(X\times(Y\setminus G)\big)$ והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.
בכיוון הראשון: $\supseteq$

$$\left(a,b\right)\in\overline{A}\times\overline{B}\Rightarrow a\in\overline{A}\,,\,b\in\overline{B}\Rightarrow$$

לכל $U\subseteq A,V\subseteq B$ סביבות פתוחות של a,b, בהתאמה, מתקיים:
$U\bigcap A\neq\varnothing\,,\,V\bigcap B\neq\varnothing$.
מכאן רואים כי: $\left(A\times B\right)\bigcap\left(U\times V\right)=\left(V\bigcap B\right)\times\left(U\bigcap A\right)\neq\varnothing$. אבל, $U\times V$ היא סביבה של $\left(a,b\right)$ ולכן $\left(a,b\right)\in\overline{A\times B}$.

הערה: $U\times V$ היא סביבה בסיסית, וראינו בכיתה שבהגדרת סגור מספיק לרוץ על הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני: $\subseteq$

על פי סעיף א', $\overline{A}\times\overline{B}$ סגורה וכמו כן מתקיים $A\times B\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$ לכן $\overline{A\times B}\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

יהיו X,Y מ"ט. הוכיחו ש $X\times Y$ האוסדורף אם ורק אם X ו- Y האוסדורף.

<u>פתרון</u>

נניח ש $X\times Y$ האוסדורף. נקבע $y\in Y$. הפונקציה $f:X\to X\times Y$ המוגדרת ע"י $f(x)=\left(x,y\right)$ רציפה שכן רציפה רכיב רכיב (ברכיב אחד זהות ובשני פונקציה קבועה). כמו כן ברור ש f חח"ע. לכן עפ"י תרגיל בית 7 שאלה 4 ב' X האוסדורף. באופן דומה מוכיחים ש- Y האוסדורף. כעת נוכיח את הכיוון ההפוך. נניח ש X ו- Y האוסדורף ונראה ש $X\times Y$ האוסדורף.
יהיו $\left(x_1,y_1\right)\neq\left(x_2,y_2\right)\in X\times Y$. בה"כ $x_1\neq x_2$. ניעזר בכך ש X האוסדורף (אם $y_1\neq y_2$ פשוט נעזרים בכך ש- Y האוסדורף). קיימות U,V סביבות פתוחות של x_1,x_2 בהתאמה כך ש $U\cap V=\varnothing$. מתקיים $U\times Y,V\times Y$ סביבות פתוחות של $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ ומכך ש $U\cap V=\varnothing$ נובע ש $\left(U\times Y\right)\cap\left(V\times Y\right)=\varnothing$ ומצאנו את ההפרדה הדרושה.