מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 10

1. $\overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$.

$\bar{A}$ סגורה ב-X כסגור, $\bar{B}$ סגורה ב-Y כסגור,
$\overline{A \times B}$ סגורה ב-$X \times Y$ כסגור.
$\bar{A} \times \bar{B}$ קבוצה סגורה כמכפלה של סגורות
(הוכח בשיעור).

$$A \subseteq \bar{A}, B \subseteq \bar{B} \Rightarrow A \times B \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$$
$$\Rightarrow \overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$$

$\bar{A} \times \bar{B} \subseteq \overline{A \times B}$.

יהי $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$. נתבונן בסביבה W של
(x, y) בטופולוגית מכפלה.
לפי ההגדרה קיימת סביבה $(x, y) \in U \times V$
כך ש-U פתוחה ב-X ו-V פתוחה ב-Y
ו-$W \supseteq U \times V$. ז"א, $x \in U$ ו-$y \in V$. אבל
מכיוון ש-$x \in \bar{A}$ ו-$y \in \bar{B}$,
$U \cap A \neq \emptyset$ ו-$V \cap B \neq \emptyset$ ולכן
$U \times V \cap A \times B \neq \emptyset \Leftarrow$
$W \cap A \times B \neq \emptyset \Leftarrow (x, y) \in \overline{A \times B}$ ■

2. נתבונן בעתקה $i: X \times Y \to Y \times X$
המוגדרת על ידי השוויון: $i(x, y) = (y, x)$
לכל $x \in X$ ו-$y \in Y$. נוכיח ש-i –

הומאומורפיזם. ברור שההעתקה הזאת חח"ע ועל. נותר להוכיח שהיא פתוחה ורציפה.
ובשבל זה מספיק להוכיח:

(1) ש-$i(U\times V)$ פתוחה ב-$Y\times X$ לכל זוג U,V כאשר $U\subseteq X$ פתוחה ב-X ו-$V\subseteq Y$ פתוחה ב-Y.
אבל $i(U\times V)=V\times U$ אזי i פתוחה.

(2) ש-$i^{-1}(V'\times U')$ פתוחה ב-$X\times Y$ לכל זוג U',V' כאשר $U'\subseteq X$ פתוחה ב-X ו-$V'\subseteq Y$ פתוחה ב-Y.
אבל $i^{-1}(V'\times U')=U'\times V'$ אזי i רציפה.

3. נסמן: $\Delta:=\{(x,x)\in X\times X|x\in X\}$
<u>יהי X מרחב האוסדורף.</u> נוכיח שהקבוצה Δ^c פתוחה. יהי $(a,b)\in\Delta^c$. אזי $a\neq b\in X$. לפי תנאי האוסדורף ב-X קיימות סביבות $U\ni a$ ו-$V\ni b$ כך ש- $U\cap V=\emptyset$. אזי הקבוצה $W=U\times V$ פתוחה, מכילה את (a,b) ו-$W\cap\Delta=\emptyset$ $\Leftarrow$ $W\subseteq\Delta^c$. לכן Δ^c פתוחה ו-Δ סגורה, מש"ל.

תהי Δ סגורה. אזי Δ^c פתוחה.
יהיו $a \neq b \in X$. אזי $(a,b) \in \Delta^c$. אזי קיימת סביבה $(a,b) \in W$ מבסיס של תופולוגית המכפלה ב- $X \times X$ כך ש-$W \subseteq \Delta^c$. כאיבר הבסיס: $W = U \times V$ כאשר U,V פתוחות ב-X. בנוסף:
$(a,b) \in U \times V \Leftarrow a \in U$ ו-$b \in V$.
$U \times V \subseteq \Delta^c \Leftarrow U \cap V = \emptyset$, אז X מרחב האוסדורף, מש"ל.

4. נסמן: $\Gamma \coloneqq \{(x,y) \in X \times Y | y = f(x)\}$
נוכיח שהקבוצה Γ^c פתוחה. יהי $(a,b) \in \Gamma^c$.
אזי $f(a) \neq b$. לפי תנאי האוסדורף ב-Y קיימות סביבות $f(a) \in V_1$ ו-$b \in V_2$ כך ש-$V_1 \cap V_2 = \emptyset$. מכיוון ש-f רציפה בנקודה a, קיימת סביבה $a \in U \subseteq X$ כך ש- $f(U) \subseteq V_1$. לכן $f(U) \cap V_2 = \emptyset$ ואז $(a,b) \in U \times V_2 \subseteq \Gamma^c$. אבל $U \times V_2$ היא קבוצה פתוחה במרחב המכפלה וכך הוכחנו ש-Γ^c פתוחה $\Leftarrow \Gamma$ סגורה, מש"ל.

5. אם נתבונן בפונקציה $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כאשר $s(x,y) = x^2 + y^2$, אז נראה שהיא רציפה

כהרכבה של כמה פונקציות הטלה, מכפלה וסכום, שרציפותן הוכחה בהרצאה. לכן הקבוצה $S^1 = s^{-1}(\{1\})$ סגורה כי הנקודון $\{1\}$ סגור ב-$\mathbb{R}$. חוץ מזה ברור שהיא חסומה ולכן S^1 תתמרחב קומפקטי של $\mathbb{R}^2$ (לפי המשפט היינה –בורל). מכאן: $S^1 \times S^1$ קומפקטי כמכפלה של מרחבים קומפקטיים (הרצאה). בנוסף S^1 מרחב קשיר ואז גם $S^1 \times S^1$ קשיר (הרצאה). אזי $f(S^1 \times S^1)$ קומפקטי וקשיר ב-$\mathbb{R}$ (ההרצאות), ז"א, קבוצה סגורה, חסומה (המשפט היינה –בורל) וקשירה ב-$\mathbb{R}$ (ההרצאות). ואנחנו יודעים (ההרצאות) שזה יכול להיות רק קטה סגור $[a,b]$, מש"ל.

6. נסמן ב- $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ את ההעתקה:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = L(\vec{x}) = a_{i1}p_1(\vec{x}) + \cdots + a_{in}p_n(\vec{x})$$

כאשר p_j היא ההטלה של $\mathbb{R}^n$ לגורם מס' j.
אזי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא ההרכבה של כמה פונקציות הטלה, מכפלה וסכום, שרציפותן הוכחה בהרצאה. לכן את קבוצת הפתרונות של המשוואה $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

אפשר להציג כ-$L^{-1}(\{b_i\})$, ז"א, כקבוצה סגורה כי $\{b_i\}$ קבוצה סגורה.

מיד מכאן: קבוצת הפתרונות של כל המערכת היא חיתוך של m קבוצות סגורות ואז גם קבוצה סגורה, מש"ל.

7. נוכיח קודם ש-$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

<u>הוכחה באינדוקציה.</u>

$\underline{n = 0}$. $P(x) = a_0$ - רציפה כפונקציה קבועה.

<u>נניח שפולינום ש החזקה שלו n רציף.</u>

אזי

$$a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_0$$
$$= x \cdot (a_{n+1}x^n + \cdots + a_1) + a_0$$

והפולינום החדש של שחזקתו $n + 1$ רציף כהרכבת מכפלה וסכום של פונקציות רציפות.

לכן P רציפה, אזי $g = P \circ f$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות, מש"ל.